VII EnGEM
Encontro Goiano de Educação Matemática
22, 23 e 24 de Maio 2019
Universidade Federal de Jataí
ISSN 2176-3305

CONTRIBUIÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Aline Mota de Mesquita Assis[1]

RESUMO

Este texto tem por objetivo discutir algumas contribuições da disciplina Álgebra Linear para a formação e desenvolvimento do pensamento matemático do aluno, futuro professor de Matemática. Fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, parte do princípio de que para o professor ensinar uma ciência é preciso, antes de mais nada, que ele domine essa ciência, no caso, a Matemática, pois é a partir dos conteúdos científicos que se derivam os métodos de ensino. Assim, apreender os conceitos algébricos é premissa fundamental para que o aluno de Licenciatura em Matemática torne-se um professor de Matemática. Analisando as contribuições da disciplina para a formação do professor de Matemática, discute-se sobre: a escrita formal matemática, com atenção à escrita e utilização dos símbolos; as demonstrações/verificações, destacando a prova por contraexemplo, e a necessidade de conduzir os alunos à formação de conexões conceituais como o intuito de romper com o conhecimento segmentado. Conclui-se que, para que o alunos em formação esteja apto a ensinar a Matemática é preciso que os pontos levantados sejam apreendidos por eles e que o pensamento investigativo matemático seja formado na mente destes futuros professores. Para tanto, faz-se necessário uma organização adequada do ensino que vise esse fim.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Teoria do ensino desenvolvimental de Davydov; Formação de professores de Matemática.

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. amm.aline@gmail.com

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear enquanto campo da Matemática é relativamente nova se considerarmos sua estruturação como tal, datando de meados do século XX essa formalização, entretanto, alguns conceitos que a constitui são mais antigos, como os sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas que já eram resolvidos pelos babilônicos há cerca de 4000 anos atrás.

Enquanto disciplina, seu surgimento no Brasil é datado da segunda metade do século XX quando da criação do primeiro curso de Licenciatura em Matemática na USP. Apesar de sua origem ser recente, sua importância vem crescendo a cada dia, pois constantemente surge a necessidade de novas tecnologias e os conceitos dela são fundamentais para tal, além disso, com um mundo cada vez mais globalizado, a exigência de um pensamento lógico, analítico e argumentativo é cada vez mais requerido tanto dos profissionais que usam a Álgebra Linear como ferramenta mental para seu trabalho, quanto para o professor de Matemática que precisa saber lidar com as novas tecnologias e ensinar os alunos a possuírem um pensamento matemático que os auxilie a ver e compreender o mundo que o cerca, transformando-o e transformando a si mesmo.

Apesar da importância da Álgebra Linear para vários cursos da área de Ciências Exatas e da Terra e Engenharias, poucas são as pesquisas voltadas para o ensino-aprendizagem da disciplina. Celestino (2000) mostra que somente a partir da década de 1990 que começou a surgir essas pesquisas e de forma tímida. No início do século XXI houve um aumento nesses estudos, mas poucos voltados para questões envolvendo o ensino-aprendizagem dos conceitos.

Assis (2018) traz um olhar para a formação de conceitos de Álgebra Linear, detendo-se na formação do conceito de transformação linear, apoiada em uma metodologia de ensino fundamentada na teoria do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov. Apesar de não ser uma pesquisa realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, pode-se olhar para o experimento didático formativo por ela realizado e pensar nos seus benefícios para o futuro professor de Matemática. É isso que é proposto nesse texto, pensar nas contribuições da Álgebra Linear para o futuro professor de Matemática por meio de um ensino pautado na teoria de Davydov. Para tanto, inicia-se discutindo alguns pressupostos desta teoria sobre o papel do professor na organização de um ensino que impulsione o desenvolvimento integral do aluno, seguido da apresentação e discussão das tarefas aplicadas por Assis (2018).

2 A TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Vasili Vasilievich Davydov (1930 – 1998) foi um psicólogo e professor universitário russo que pertenceu à terceira geração de psicólogos que desenvolveram os trabalhos de Vygotsky no período de 1920 a 1930. Dentre suas obras consta-se: *Tipos de generalización en la enseñanza, Problemas de la enseñanza y del desarollo, La enseñanza escolar y el desarollo psíquico*. O foco de seu trabalho estava no modo pelo qual o ensino pode proporcionar aos alunos a apropriação de conhecimento científico, concebendo a educação e o ensino como o processo para o desenvolvimento humano, no qual os alunos operam por conceitos.

Ensinar conforme a concepção de Davydov coloca o professor frente a um modo de organizar o ensino que pressupõe uma aprendizagem intencional e sistematizada. A esse respeito, Moura (2014) afirma que ensinar é um ato consciente do educador que, de forma intencional, organiza situações de ensino que possibilitam a apropriação de conceitos que se tornam ferramentas simbólicas utilizadas no aprimoramento dos processos de construção da vida, os quais não têm fim.

Nessa perspectiva, conforme afirma Davydov (1988), é através do ensino que o aluno se desenvolve intelectualmente e esse desenvolvimento se dá por meio da formação de conceitos teóricos, afinal, “a base do ensino desenvolvimental é seu conteúdo [conteúdo científico dos problemas das tarefas]” (DAVYDOV, 1988, p. 164), ou seja, todo o ensino deve partir, primeiramente, do conteúdo científico a ser ensinado, para, a partir dele, pensar no melhor método a ser aplicado, pois os métodos, ou modelos de ensino, se originam dos conteúdos (DAVYDOV, 1988).

Diante dessas afirmativas de Davydov nota-se a importância e necessidade do professor de Matemática compreender plenamente a sua ciência, pois não há como ensinar o que não se sabe. É preciso que o professor, antes de ensinar a formar conceitos, tenha os conceitos matemáticos formados e consiga pensar cientificamente através dos modos de pensar a Matemática, ou seja, pensar como um matemático em seu processo investigativo de descobrimento de uma nova teoria. Obviamente, o intuito do ensino não é a obtenção de novas teorias matemáticas, mas a obtenção da forma de pensar durante esse processo investigativo, que é o que aqui chamamos de pensar matematicamente seguindo as etapas de experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar (VAZ, 2012).

Sobre esta forma dos alunos pensar durante o processo de ensino-aprendizagem, Davydov (1988, p. 165) afirma que:

> O pensamento dos alunos, no processo de atividade de aprendizagem, de certa forma, se assemelha ao raciocínio dos cientistas, que expõem os resultados de suas investigações por meio das abstrações, generalizações e conceitos teóricos substantivos, que exercem um papel no processo de ascensão do abstrato ao concreto.

Para que isso ocorra, o professor precisa organizar o ensino através de atividades de estudo que conduzam o aluno na formação de conceitos, as quais são constituídas de tarefas que devem ser elaboradas de acordo com os pressupostos de Davydov (1988), isto é, devem ser constituídas de problemas que conduzam os alunos a desenvolverem as ações de aprendizagem de Davydov, a saber,

> • transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado;
> • modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras;
> • transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em “forma pura”;
> • construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
> • controle da realização das ações anteriores;
> • avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada (DAVYDOV, 1988, p. 173, destaques do autor).

Assim, ao professor cabe o papel de organizar e mediar o ensino com o intuito de que seus alunos aprendam e consigam utilizar os conceitos matemáticos como ferramenta mental para pensar nas questões de seu cotidiano, sejam estas questões relacionadas a aspectos totalmente práticos, como juros e descontos, ou a aspectos teóricos, como um modo lógico de pensar.

3 CONTRIBUIÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Assis (2018), nos dados de sua pesquisa sobre a formação do conceito de transformação linear, nos conduz à reflexão de que os alunos de Licenciatura em Matemática também precisam apreender alguns pontos por ela analisados, pois como futuros professores de Matemática, necessitam se atentar para alguns aspectos relacionados ao ensino-aprendizagem para fazerem uma análise de seu pensamento enquanto aluno e adquirir uma visão do modo de ensinar esses aspectos aos seus alunos. A seguir passaremos a discutir alguns desses pontos.

O primeiro a ser destacado é quanto à escrita formal da Matemática e o uso correto de seus símbolos. A Matemática possui uma linguagem própria que a difere de outras ciências, possuindo uma estrutura textual que possibilita o entendimento do que é determinando texto, se algum resultado a ser provado/verificado/demonstrado, a prova/verificação/demonstração desse resultado ou uma definição, por isso, saber escrever na Matemática é tão importante, e seja escrever utilizando texto argumentativo ou recorrendo aos símbolos matemáticos. Estes, por sinal, tem sido frequentemente mal utilizado pelos alunos. O símbolo quando não possui um significado, um sentido para o aluno, é sempre utilizado de forma incorreta ou quando utilizado de forma correta, muitas vezes representa uma mera repetição do que foi exposto pelo professor. Muito mais que saber empregar corretamente um símbolo é preciso que o aluno saiba que, por meio dele, pode-se adquirir um raciocínio mais sintético que conduz à agilidade dos cálculos algébricos, principalmente dentro da Álgebra Linear, que utiliza vários símbolos para representar seus conceitos.

Em sua pesquisa, Assis (2018) ao solicitar que os alunos, que estavam reunidos em grupos, criassem um modelo para o conceito de transformação linear, obteve, dentre outros, os modelos retratados nas Figuras 1 e 2 abaixo.

Figura 1 – Modelo 1 para o conceito de transformação linear.

$$F: U \to V$$
$$\{F(a+b) = F(a) + F(b) \mid a, b \in U\}$$
$$\{F(\alpha b) = \alpha F(b) \mid \alpha \in \mathbb{R}\,; b \in U\}$$

Fonte: Assis (2018, p.143).

Figura 2 – Modelo 2 para o conceito de transformação linear.

Transformações Lineares são formas de determinar funções que satisfaçam as condições de um vetor: domínio, contradomínio e imagem.

$$F(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Para k uma constante, $k \in \mathbb{R}$ e x um vetor

$F(x_1) + F(x_2)$ ou $kF(x)$ tal que:

$F(x_1) + F(x_2) = F(x_1 + x_2)$ e $kF(x) = F(kx)$

$F(Kx) = g(y)$ e $F(x_1 + x_2) = h(z)$

$g(y) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \qquad h(z) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$

Fonte: Assis (2018, p. 145).

Note que na Figura 1 os alunos utilizam a notação de conjunto para representar uma propriedade que deve ser satisfeita pela aplicação F, não se detêm aos detalhes do que estavam escrevendo, como especificar que tipo de conjunto são os conjuntos U e V, além de não especificar quantos elementos dos conjuntos dados devem satisfazer as propriedades, se para todos ou se para determinados elementos. Com isso não é possível compreender matematicamente se o modelo criado é de um resultado ou de uma definição.

Na Figura 2 os alunos já utilizaram um texto mais argumentativo, onde, apesar dos equívocos conceituais, é possível compreender que trata-se de uma definição. Entretanto, a utilização da simbologia matemática é equivocada em alguns pontos, como quando ao explicitar a aplicação F, eles usam o símbolo de "tal que" sem estar em uma representação de conjuntos, mas para informar que o elemento x pertence ao domínio, fato desnecessário devido à notação de função.

Outro ponto a ser destacado é quanto à demonstração/verificação de resultados. Assis (2018) retrata a situação de um aluno com dificuldades de compreender e aceitar o processo de demonstração por contraexemplo, a saber, o processo de demonstrar que um resultado não é válido apenas exibindo um caso particular, um exemplo, que não satisfaz a afirmação a ser verificada. Isso leva-nos a refletir sobre como é ensinado a demonstração aos alunos. Sabe-se que demonstrar não é tarefa fácil, porém, é possível de ser apreendida e, mais do que isso, é necessária ao professor de Matemática. Outro aspecto é a natureza dos exercícios que exigem a demonstração/verificação, os quais, em sua grande maioria, são para verificar afirmações verdadeiras, não exigindo que o aluno pense se aquilo é realmente verdadeiro ou se é falso, por isso surgiu tamanha estranheza no aluno relatado por Assis (2018).

Visando conduzir o aluno a pensar na possibilidade de uma afirmação não ser verdadeira e, com isso, utilizar a demonstração por contraexemplo, bem como a demonstração direta da afirmação verdadeira, Assis (2018) propõe a seguinte questão:

Figura 3 – Questão para demonstração direta e por contraexemplo.

Considerando as operações soma e multiplicação por escalar usuais do domínio e do contradomínio de cada transformação abaixo listada, identifique quais delas são lineares e quais não são, sempre justificando a sua resposta.

a) $A: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $A(x) = 2x$

b) $B: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $B(x) = kx$, onde $k \in \mathbb{N}$ é fixo

c) $C: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $C(x, y) = (xy,\ y)$

d) $D: P_3 \longrightarrow P_3$ tal que $D(p) = p'$(derivada de p), onde P_3 representa o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3.

e) $F: M(n \times n) \longrightarrow M(n \times n)$ tal que $F(A) = AB$, onde $M(n \times n)$ é o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais, $A \in M(n \times n)$ e B é uma matriz fixa em $M(n \times n)$.

f) $G:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = ax + b$, onde $a,\ b \in \mathbb{R}$

Fonte: Assis (2018, p. 93).

Observe que com esta questão, a autora trabalha, além dos tipos de demonstração/verificação mencionados, o conceito de espaço vetorial, trabalhando com conjuntos habitualmente não utilizados durante estudo deste conceito, possibilitando ao aluno uma visão mais global de conjuntos que são espaços vetoriais e destacando, em alguns casos, alguns que não são e porque não são.

Por fim, destaca-se a necessidade de conduzir os alunos à formação de conexões conceituais. Tradicionalmente, os conceitos são ensinados isoladamente em cada disciplina, ou seja, um mesmo conceito, como o de vetor, por exemplo, é estudado em Álgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Física e na Matemática do Ensino Médio, porém, cada disciplina o trata em suas particularidades exigidas para o desenvolvimento de cada uma delas, sem conduzir o aluno a ver que o conceito é o mesmo, somente tratado conforme convém naquele momento. Assim, o conhecimento fica segmentado e frágil e o aluno não consegue obter uma visão unificada da Matemática.

Assis (2018) tentando romper com esse conhecimento segmentado dentro da Álgebra Linear, propõe em vários momentos, questões que utilizam conceitos de outras disciplinas para conduzir o aluno na aplicação do conceito de transformação linear e na formação de conexões conceituais. Na Figura 3 pode-se ver isso quando ela utiliza os conjuntos dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3 unido ao conceito de derivação e o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais para representar espaços vetoriais.

Outro exemplo de possibilidade de formar conexões conceituais encontra-se na Figura 4, quando Assis (2018) utiliza o conjunto dos números complexos como espaço vetorial para que os alunos definam uma transformação linear.

Figura 4 – Conexão conceitual com o conjunto dos números complexos.

Em computação gráfica e geometria são comuns problemas de rotação de objetos no plano e no espaço. Esses problemas podem ser desenvolvidos recorrendo à teoria dos números complexos simplesmente utilizando a parte operacional por meio de suas operações usuais e da representação de um número complexo em forma de vetor como criado por Hamilton em 1835 (e visto na história exposta no início dessas aulas) associada com a visão geométrica dessas operações no plano Argand-Gauss, onde cada número complexo da forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária, é representado na forma vetorial (a, b) e assim representado no plano Argand-Gauss como uma representação de um vetor real no plano cartesiano.

Utilizando o *software* Geogebra podemos obter a representação geométrica de um número complexo a partir da notação dada por Hamilton. Assim, com o auxílio deste *software*, faça o que se pede.

a) Marque o ponto $z_1 = 2 + 3i$.

b) Marque os pontos abaixo e explicite o número complexo

b.1) $z_2 = iz_1 =$ ______________________

b.2) $z_3 = iz_2 =$ ______________________

b.3) $z_4 = iz_3 =$ ______________________

b.4) $z_5 = iz_4 =$ ______________________

c) Observando o gráfico obtido com a marcação dos pontos dos itens (a) e (b), que conclusões você tira a partir destas construções?

d) Dado um número complexo qualquer $z = a + bi$, qual seria o número correspondente a uma rotação arbitrária de 90º (90 graus) deste número z?

e) Qual a função que determina a rotação obtida no item (d)?

f) Prove que a função obtida no item (e) é linear.

Fonte: Assis (2018, p. 97).

Veja que com a questão da Figura 4, Assis (2018) trabalhou, além da conexão conceitual, a demonstração de uma afirmação que poderia ser verdadeira ou falsa, dependendo da função rotação dada pelo aluno. Isso coloca o aluno para fazer uma avaliação de seu pensamento, pois a questão já diz para provar que a função que ele criou era linear, de forma que se o aluno não chegasse a este consenso, sua função não estaria correta.

Em todas as figuras acima, bem como em outras situações relatadas em seu trabalho, vê-se a autora trabalhando o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, conduzindo-os à obtenção de tal modo de pensar através de um processo de ensino investigativo, fatores primordiais ao professor de matemática.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Álgebra Linear é, de fato, uma disciplina que eleva o pensamento do aluno para um nível maior de abstração, onde ele tem mais contato com conteúdos que precisam ser estudados, muitas vezes, sem uma aplicação real, pois para isso é necessário outros conteúdos que, muitas vezes estão inacessíveis pelo fato da disciplina estar alocada no início dos cursos de graduação. Entretanto, com um ensino adequadamente organizado é possível romper com essa barreira e conduzir os alunos na apreensão dos conceitos algébricos. É isso que Assis (2018, p. 168) retrata em seu trabalho:

> Os resultados mostraram que o curso do desenvolvimento do conceito científico sob as condições do processo educacional constitui uma forma original de colaboração sistemática entre o professor e o aluno, na qual ocorre o amadurecimento das funções psicológicas superiores. Com condições de ensino adequadas e intencionalmente planejadas, é possível obter o surgimento e o desenvolvimento do pensamento teórico no plano interior das ações mentais.

Assim, através da Álgebra Linear pode-se desenvolver um pensamento matemático no aluno, onde os símbolos algébricos façam sentido e as conexões conceituais permitam um pensamento integrado e sistematizado. Com isso, esse aluno desenvolve o seu intelecto e se torna apto a pensar a Matemática enquanto ciência de estudo e enquanto objeto de ensino, possibilitando que este aluno, quando assumir a posição de professor, esteja apto a ensinar os seus alunos a pensar matematicamente, como ele aprendeu.

Referências

ASSIS, Aline Mota de Mesquita. **Atividade de estudo do conceito de transformação linear na perspectiva da teoria do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov**. 2018. 235 f. Tese (Doutorado em Educação)–Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2018.

CELESTINO, Marcos Roberto Barbosa. **Ensino-aprendizagem da álgebra linear**: as pesquisas brasileiras na década de 90. 2000. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental**: A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução José Carlos Libâneo e Raquel A. M. M. Freitas, de Problems of developmental Teaching – The experience of theoretical and experimental psychological research. Soviet Education, Ago. 1988, vol. XXX, nº. 8.

MOURA, Manoel A. et al. A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In: MOURA, Manoel Ariosvaldo de (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber Livros, 2010. p. 81-110.

VAZ, D. A. F. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando Investigação Matemática com o Geogebra. **Educativa**, Goiânia, v. 15, n. 1, 2012, p. 39-51.