

## CONTRIBUIÇÕES DE HERMANN GRASSMANN PARA O DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA LINEAR

Julia Santana Garcia Borges<sup>1</sup>

Aline Mota de Mesquita Assis<sup>2</sup>

### RESUMO

Este artigo é um recorte de uma pesquisa que está sendo desenvolvida no âmbito do PIBIC e tem como objetivo apresentar aspectos da vida e da obra de Hermann Grassmann, destacando suas contribuições para o desenvolvimento do campo da Matemática conhecida hoje como Álgebra Linear. Se refere a uma pesquisa bibliográfica de cunho qualitativo. Nota-se que, apesar de não ser formado em Matemática, Grassmann contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento dela, principalmente com teorias algébricas, como a teoria dos espaços vetoriais. Através da sua biografia vê-se a influência familiar para que ele tendesse a essa área de estudo, apesar de, inicialmente, não acreditarem em seu potencial. Percebe-se a persistência de Grassmann para com a busca em melhorar a sua obra para que ela possuísse uma maior relevância e aceitação pelos matemáticos. Em suma, o que hoje vemos como um trabalho magnífico, foi visto sem grande contentamento pelos estudiosos de sua época e, até hoje, muitos dos matemáticos desconhecem a sua teoria.

**Palavras-chave:** Hermann Grassmann; Álgebra Linear; História da Matemática

### 1 INTRODUÇÃO

Há cerca de 4000 anos atrás, com os povos babilônicos, iniciou-se o desenvolvimento de uma teoria matemática que resultou no que hoje é conhecido como Álgebra Linear. Já nessa época, eles sabiam resolver sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas. Com o tempo, à medida que novas necessidades surgiam, a Matemática foi se desenvolvendo através da colaboração de diversos cientistas e matemáticos, como Leibniz, Cayley e Peano, dentre outros, os quais tiveram grandes contribuições para o desenvolvimento dos conteúdos que hoje constituem a Álgebra Linear.

<sup>1</sup> Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. E-mail: juliaborges207@gmail.com

<sup>2</sup> Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. E-mail: aline.mesquita@ifg.edu.br

Dentre esses nomes de destaque, surge um não muito conhecido, mas que contribuiu significativamente para o estabelecimento de teorias que, até então, os cientistas almejavam. Hermann Güenther Grassmann (1809-1877), um alemão, teólogo e matemático autodidata, que viveu em pleno auge da Revolução Industrial e alheio a todo o conhecimento que era desenvolvido nos grandes centros universitários da época.

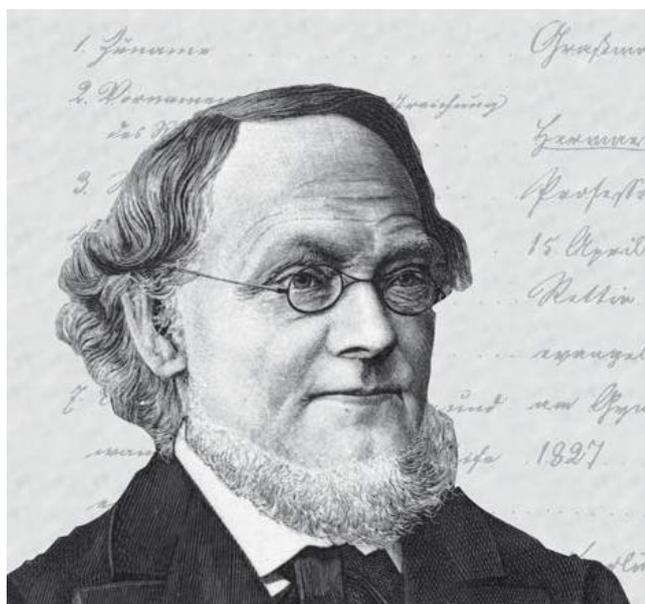
Os métodos matemáticos de Grassmann demoraram a ser aceitos pelos seus contemporâneos, mas a sua persistência foi fundamental para o surgimento de algo revolucionário para seu tempo. Sander (1979, p. 809, tradução nossa) afirma que “Todos os matemáticos estão, como Newton disse, sobre os ombros de gigantes, mas poucos se aproximaram de Hermann Grassmann por criar, sozinho, um novo assunto.” Devido a toda notoriedade de sua obra, atualmente ele é denominado de pai da Álgebra Linear.

Apesar de seus grandes feitos e do reconhecimento da sua obra pela comunidade matemática da atualidade, pouco se fala sobre quem foi e exatamente o que fez Hermann Grassmann para obter esse reconhecimento. Sendo assim, este trabalho, que é fruto de uma pesquisa desenvolvida em um Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, e que está em sua fase inicial, visa divulgar quem foi Grassmann e os seus feitos dentro da Álgebra Linear, sendo este, um recorte da pesquisa que está em desenvolvimento.

Assim sendo, este texto é fruto de uma pesquisa bibliográfica, que norteia em responder à seguinte questão: quem foi Hermann Güenther Grassmann e quais foram as suas contribuições para o desenvolvimento da Álgebra Linear? Desta forma, iniciaremos com uma apresentação da vida de Grassmann, relatando alguns de seus feitos, culminando em sua contribuição para a Álgebra Linear.

## **2 A VIDA ESTUDANTIL E PROFISSIONAL DE HERMANN GRASSMANN**

Hermann Grassmann nasceu em 1809 em Stettin (Prússia Oriental), foi o terceiro Filho de Günter Grassmann e Johanne Luise Friederike Medenwald, seu pai além de outras profissões, foi professor de matemática.

**Figura 1- Hermann Grassmann**

Fonte: GRASSMANN J. (2011)

Pertencendo a uma família com um bom grau de educação e com privilégios, Hermann não se destacou nos primeiros anos no Ginásio, seu pai chegou a acreditar que ele não poderia chegar a ter alguma relevância acadêmica, mas aos poucos começou a progredir na escola, ficando em segundo lugar no exame final do ensino médio. Decidido a estudar teologia, em 1827 ingressa na Universidade de Berlim.

Não há informações acerca da ocorrência de formação acadêmica em matemática, porém, foi ela, a matemática, a responsável por seu retorno a Stettin após finalizar seus estudos em Berlim, em 1830. Grassmann torna-se professor em ginásios e inicia a realização de pesquisas matemáticas de maneira autônoma. Retornando em 1831 a Berlim para realizar exames visando uma carreira acadêmica, não obteve um bom desempenho, sendo-lhe permitido lecionar apenas nos níveis baixos. Em 1832 foi nomeado para o Ginásio de Stettin como professor assistente e nessa mesma época fez suas primeiras descobertas matemáticas que posteriormente seriam desenvolvidas e publicadas.

Devido ao tipo da sua licença profissional, em 1835, Grassmann foi nomeado para ensinar matemática, física, alemão, latim e estudos religiosos na Otto Schule, uma escola de ensino primário. E em 1839 ele passou nos exames de teologia, o qual permitiu dar aulas para o ensino secundário.

Grassmann almejava lecionar para o nível superior para que pudesse dedicar mais tempo às suas pesquisas. No prefácio de sua obra *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (A teoria da extensão linear, um novo ramo da matemática) percebe-se tal inquietação por sua profissão não o ter permitido dedicar-se como desejava.

Eu espero indulgência, mais particularmente, porque minha profissão me deixou pouquíssimo tempo de execução e não me deu a possibilidade de fazer comunicações provenientes dessa ciência ou, de ao menos, matérias semelhantes, e de ganhar assim o frescor vivo que deve inspirar e vivificar o todo, se deve aparecer como um elemento vivo do organismo do conhecimento. (GRASSMANN H., 1878, prefácio, tradução nossa)

Em 1840, Grassmann fez exames admissionais que foram importantes para ele, pois teve que apresentar um ensaio sobre a teoria das marés<sup>3</sup>, para isso, ele utilizou a teoria básica de *Méchanique céleste* (Mecânica celeste) de Laplace e da *Méchanique analytique* de Lagrange (Mecânica Analítica de Lagrange) e produziu o seu ensaio *Theorie der Ebbe und Flut* (Teoria do fluxo e refluxo), introduzindo pela primeira vez uma análise baseada em vetores. Embora seu ensaio tenha sido aceito pelos examinadores, eles não deram importância às inovações ali introduzidas. Grassmann percebeu que sua teoria era amplamente aplicável e decide dedicar-se ao desenvolvimento de suas ideias sobre espaços vetoriais, incluindo adição e subtração vetorial, diferenciação vetorial e teoria da função vetorial. (DIEUDONNÉ, 1979, p.4)

### 3 AS OBRAS DE GRASSMANN

Depois de negadas todas as tentativas em se tornar um professor universitário, Grassmann voltou sua atenção para escrever sua obra *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (A teoria da extensão linear, um novo ramo da matemática), que foi publicada em 1844. Nela, ele desenvolveu a ideia de uma álgebra em que os símbolos que representam entidades geométricas como pontos, linhas e planos, são manipulados usando certas regras, chamado métodos vetoriais. Ele criou o que hoje é chamado de álgebra exterior.

---

<sup>3</sup> A teoria das marés explica o fenômeno natural das marés baixas e altas, onde conclui-se que estas ocorrem devido a atração do Sol e da Lua sobre as águas do mar devido a força gravitacional. (MANTELLATO, 2012)

Os textos de Grassmann estavam muito à frente do seu tempo e como consequência, seu livro foi ignorado. Nem mesmo Möbius<sup>4</sup> entendeu o significado de sua abordagem e se recusou a escrever uma resenha. Grassmann, passou então a aplicar seus novos conceitos a outras situações, pois acreditava que se as pessoas vissem como a teoria poderia ser aplicada, a levariam a sério.

Em 1845, ele publicou o artigo *Neue Theorie der Elektrodynamik* (Nova teoria da eletrodinâmica) além de escrever vários artigos com aplicações em curvas e superfícies algébricas nos dez anos seguintes. Möbius sugeriu que ele concorresse ao prêmio proposto pela *Fürstliche Jablonowski'schen Gesellschaft* (responsável por anunciar anualmente questões premiadas na área de exatas) para trabalhos que resolvessem um problema proposto pela primeira vez por Leibniz, o qual visava estabelecer características geométricas sem usar propriedades métricas. Grassmann submeteu seu livro *Die Geometrische Analyse geknüpft und die von Leibniz Charakteristik* (A análise geométrica vinculada as características de Leibniz) que recebeu o prêmio em 1 de julho de 1846. No entanto, Möbius, que foi um dos jurados, criticou a maneira como Grassmann introduziu ideias abstratas sem fornecer ao leitor um gancho intuitivo para pendurá-las:

[...] me parece que uma falsa filosofia da matemática está na base [da obra]. O caráter essencial do conhecimento matemático, e intuição, parece estar completamente banido. Uma tal *Ausdehnungslehre* ‘abstrata’, tal como ele procurou, poderia ser desenvolvida unicamente a partir de conceitos. Mas a fonte do conhecimento matemático não repousa sobre os conceitos, mas sobre a intuição. (GRASSMANN, 1979, p. 277, tradução nossa).

A citação acima expressa a forma como enxergavam a matemática na época. Hoje a abstração na matemática é algo comum e esperado, sem que isso tenha um apelo intuitivo, como o uso dos axiomas por exemplo. Mas para a época isso não era tão natural como para os dias atuais.

Grassmann sentiu-se um pouco ofendido por estar produzindo matemática altamente inovadora, mas ainda ensinava nas escolas secundárias. Em maio de 1847 recebeu o título de *Oberlehrer* (professor sênior) na escola *Friedrich Wilhelm Schule* e, no mesmo mês, escreveu ao Ministério da Educação da Prússia solicitando que seu nome fosse colocado em uma lista daqueles a serem considerados aptos para cargos

---

<sup>4</sup> Möbius foi um matemático e astrônomo alemão. A ele se devem a fita de Möbius, a função de Möbius, as transformações de Möbius, a fórmula de inversão de Möbius e a rede de Möbius. (BARILE, 2007)

universitários. O Ministério da Educação pediu a opinião de Kummer<sup>5</sup> sobre Grassmann.

O relatório de Kummer acabou com qualquer esperança de Grassmann em conseguir um cargo universitário, alegando que foi expresso de maneira deficiente. É interessante ver quantos matemáticos importantes não conseguiram reconhecer a importância da matemática apresentada por Grassmann, se prendendo à forma como ela era apresentada e menosprezando a teoria em si.

No início de 1849, ele se casou com Therese Knappe, tiveram onze filhos, dos quais sete atingiram a idade adulta. Em março de 1852, o pai de Grassmann, Justus, morreu e, mais tarde naquele ano, Grassmann foi nomeado para preencher a antiga posição de seu pai no Stettin Gymnasium. Isso significava que, embora ainda ensinasse em uma escola secundária, ele agora tinha o título de professor.

Tendo falhado em obter reconhecimento por sua matemática, Grassmann voltou-se para um de seus outros assuntos favoritos, o estudo do sânscrito e do gótico. Durante sua vida ele ganhou mais reconhecimento por seu estudo de idiomas do que pela matemática, chegando a provar que o germânico era “mais velho” em um padrão fonológico que o sânscrito, estabelecendo-o como a língua mais antiga na linguística indo-europeia. Ele recebeu mais destaque como linguista que como matemático.

Grassmann, também começou a dedicar-se à física onde desenvolveu algumas teorias, chegando a publicar a teoria da mistura de cores, que contrariava a teoria proposta por Helmholtz, resumindo-as em 4 leis.

No entanto, em 1854, ele retornou à matemática, sua grande paixão, e à sua teoria da extensão, decidido que reescreveria completamente o trabalho na tentativa de ter seu significado reconhecido. Foi então publicado, em 1862, uma nova versão da sua obra de 1844, denominada *Die Wissenschaft der extensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre*, (A ciência das grandezas extensivas ou a teoria da extensão) (GRASSMANN H., 1878, 1862, tradução nossa).

Nessa nova versão já não havia mais a linguagem filosófica pesada que continha na primeira, mas a leitura ainda era densa e necessitava de um estudo minucioso de toda a teoria, fato que levou os matemáticos da época a ignorar novamente o seu trabalho, não lhe dando voz em meio à comunidade científica.

---

<sup>5</sup> Kummer foi um físico e matemático alemão. Estudou teologia, mas interessou-se pela matemática ao participar de uma conferência. (ERNST EDUARD KUMMER (1810-1893), 2022).

Desapontado por não conseguir convencer os matemáticos, voltou-se novamente para a pesquisa em linguística, onde foi homenageado por suas contribuições ao ser eleito para a American Oriental Society e com a concessão de um diploma honorário pela Universidade de Tübingen, na Alemanha, segundo a tese de Dourado (2021).

Grassmann retornou à matemática nos últimos dois anos de sua vida e em 26 de setembro de 1877, faleceu de problemas cardíacos após um período de saúde bastante debilitada.

#### **4 OS FEITOS DE GRASSMANN PARA A ÁLGEBRA LINEAR**

Em 1843, Grassmann, que mesmo sem ter aprendido muito bem a matemática durante seu ensino médio, quando retornou a Berlim passou a interessar-se por geometria, devido aos exames que chegou a fazer para melhorar sua posição de professor. Segundo Dieudonné (1979), Grassmann chegou ao conhecimento de vetores por si só, pois não havia aprendido matemática além do currículo do ensino médio, e quando retornou a Berlim em 1830, começou a se interessar por geometria, e só mais tarde foi ter conhecimento mais avançado de matemática.

Ao estudar para um de seus exames de admissão profissional, Grassmann percebeu que os seus cálculos de vetores simplificavam muito a exposição de Laplace e de Lagrange, autores do artigo sobre a Teoria das Marés que ele deveria apresentar para sua avaliação. Foi a partir daí que começou a desenvolver suas ideias e em menos de dois anos, em 1844, foi publicada a sua primeira versão da Teoria da Extensão.

Sander (1979) descreve as contribuições de Grassmann, destacando que ele desempenhou um papel fundamental na criação da teoria de corpos (através dos problemas clássicos de construção) e na criação da álgebra linear. A álgebra geométrica sonhada por Leibniz, teve o conceito de número real que foi assimilado por Grassmann. Ele criou conceitos da álgebra linear, como espaço vetorial, transformações lineares e produto interno, e mostrou como aplicá-los corretamente na geometria. Além disso também distinguiu a noção de vetor polar e vetor axial no qual a distinção entre eles foi prejudicial pelo fato de que no modelo aceito ambos têm a mesma representação matemática (SANDER, 1979).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos matemáticos de Grassmann demoraram para ser reconhecidos, como expresso na introdução, porém inspiraram o trabalho de Élie Cartan<sup>6</sup>, Hankel<sup>7</sup>, Peano<sup>8</sup>, Whitehead<sup>9</sup> e Klein<sup>10</sup>. Muitas das ideias de Peano foram baseadas nas ideias de Grassmann, sobretudo a axiomatização do conceito de espaço vetorial.

Em toda a galeria de matemática proeminentes que, desde a época dos gregos deixaram sua marca na ciência, Hermann Grassmann certamente se destaca como o mais excepcional em muitos aspectos [...] Quando comparada com as de outros matemáticos, sua carreira é uma sucessão ininterrupta de estranhezas: incomuns eram seus estudos; incomum era seu estilo matemático; incomum e infeliz a total falta de compreensão de suas ideias, não apenas durante sua vida, mas muito depois de sua morte; deplorável a negligência que o obrigou a permanecer por toda a vida professor de uma escola secundária quando homens deveras inferiores ocupavam cargos nas Universidades<sup>13</sup>. (DIEUDONNÉ, 1979, p. 1, tradução nossa).

Percebe-se tamanha importância da persistência de Grassmann, além da sua contribuição para o desenvolvimento da matemática. Uma lição de vida que podemos retirar de toda sua trajetória é que muitas vezes as pessoas de nossa época não são capazes de compreender aquilo que pensamos, mas grande é aquele que não desiste de sua ideia. Além disso, a contribuição do autor para a matemática é de grande significância, sendo necessário estudos acerca dele, tendo em vista a divulgação dos seus feitos.

Pode-se perceber, no decorrer do artigo, como Grassmann foi construindo seu processo de pensamento para chegar ao que conhecemos hoje como álgebra linear, percebe-se, mesmo a pesquisa estando em seu estágio inicial, que é notório a importância de Grassmann para a constituição da Álgebra Linear e que muito ainda há de ser estudado sobre sua vida e seus escritos, bem como compreender as interferências sociais e culturais da época em sua vida e obra.

---

<sup>6</sup> Élie Joseph Cartan foi um matemático francês, que realizou trabalhos fundamentais na teoria de grupos de Lie e seus usos geométricos. (ÉLIE CARTAN, 2022).

<sup>7</sup> Hermann Hankel foi um matemático alemão que trabalhou na teoria dos números complexos, na teoria das funções e na história da matemática. Ele é lembrado pela transformada de Hankel e pela matriz de Hankel. (ROBERTSON, 2000).

<sup>8</sup> Giuseppe Peano foi um matemático e glotologista italiano. Autor de mais de 200 livros e artigos, foi um dos fundadores da lógica matemática e da teoria dos conjuntos, para as quais ele também contribuiu bastante da notação. (GIUSEPP PEANO, 2022).

<sup>9</sup> Alfred North Whitehead foi um filósofo, lógico e matemático britânico. É o fundador da escola filosófica conhecida como a filosofia do processo, atualmente aplicada em vários campos da ciência. (FERNÁNDEZ e TAMARO, 2004).

<sup>10</sup> Felix Christian Klein foi um matemático alemão. Seu trabalho incidiu na geometria não-euclidiana e nas interligações entre a teoria dos grupos e a geometria. (ESCOLA, 2022).

## REFERÊNCIAS

BARILE, Margherita. **Möbius August Ferdinand (1790-1868)**. Science World, 2007. Disponível em: <<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Moebius.html>>. Acesso em: 25 out. 2022.

DIEUDONNÉ, J. **The Tragedy of Grassmann, Séminaire de Philosophie et Mathématiques**, no. 2 (1979), 1-14.

ÉLIE CARTAN. **Só Matemática**, 1998-2022. Disponível em <<https://www.somatematica.com.br/biograf/eliecartan.php>>. Acesso em: 25 out. 2022.

ESCOLA, Equipe Brasil. **Felix Christian Klein**. Brasil Escola, 2022. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/biografia/felix-christian-klein.htm>>. Acesso em: 25 out. 2022.

ERNST EDUARD KUMMER (1810-1893). **Ecalculo**, 2022. Disponível em: <<http://ecalculo.if.usp.br/historia/krummer.htm>>. Acesso em: 25 out. 2022.

FERNÁNDEZ, Tomás; TAMARO, Elena. **Em biografias e vidas - A enciclopédia biográfica**, 2004. Disponível em: <<https://www.biografiasyvidas.com/biografia/w/whitehead.htm>>. Acesso em: 25 out. 2022.

GIUSEPP PEANO. **Só Matemática**, 2022. Disponível em <<https://www.somatematica.com.br/biograf/peano.php>>. Acesso em: 25 out. 2022.

GRASSMANN, Hermann. **Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik**. ZWEIT, im text unveränderte Auflage. Leipzig: Verlag von otto Wigand, 1878.

GRASSMANN, Hermann. **Die Ausdehnungslehre**. Berlin: Verlag von th. chr. fr. enslin, 1862.

GRASSMANN, Justus. **Description of the life of Hermann Grassmann by his son Justus Grassmann**, probably written shortly after the death of his father, 1877. In: PETSCHKE, HansJoachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. *From Past to Future: Grassmann's Work in Context*. Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 3-8.

MANTELLATO, P.M.B. **As influências da Lua na Terra e o Fenômeno das Marés**. 2012. 122 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

ROBERTSON, E. F. **Hermann Hankel**. *Math's History*, 2000. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hankel/>>. Acesso em: 25 out. 2022.

SANDER, Fearnley. **Hermann Grassmann and creation of linear algebra**, *Amer. Math. Monthly* 86 (10) (1979), 809-817.