CORRESPONDÊNCIAS E GENERALIZAÇÕES NO ENSINO: POLIEDROS E PITÁGORAS EM R^3

Bryon Richard Hall[1]
Milenna Severino Thomaz[2]

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de sugerir a apresentação de assuntos não mencionados para alunos do Ensino Fundamental e Médio que ainda não fazem parte da grade curricular.. São tópicos simples e iminentemente instigadores da curiosidade de qualquer aluno disposto a se aventurar no universo da geometria espacial. Dois tópicos pouco citados têm potencial excepcional como exemplos de correspondência e de generalização. O primeiro é construído no espaço tri-dimensional com poliedros, figuras que servem como exemplos para várias formas de correspondência e generalizações e aplicação de resultados como a fórmula de Euler, relação entre seus componentes - faces, arestas e vértices - e a de dualidade no espaço R^3 e de um teorema de René Descartes. Exemplos simples como dodecaedro-icosaedro já servem e exemplos como semi-regular a sólidos de Catalan são facilmente apresentados. O segundo tópico é do teorema de Pitágoras em R^3, com generalização de triângulo para tetraedro, especificamente de triângulo retangular para tetraedro tri-retangular, de duas arestas para três faces e de comprimento para área. Concluímos que a geometria sólida é onde mais amplamente são encontrados exemplos de generalização e correspondência.

Palavras-chave: Geometria Sólida, Poliedros, Dualidade de Sólidos, Teorema de Pitágoras.

1 1 POLIEDROS NO ESPAÇO TRI-DIMENSIONAL.

Objetos geométricos têm níveis diferentes de complexidade. Os conceitos mais simples - pontos, retas, planos, círculos e triângulos - são de fácil compreensão mas de uso limitado em expor as relações entre os componentes de um todo. Poliedros representam um avanço neste sentido e, propomos mostrar que poliedros exibam as propriedades de inter-relação de modo pleno mas compreensível por alunos na faixa de idade dos nove aos 16 anos. Caracterizar um poliedro por suas diversas faces e sua

[1] Universidade Federal de Goiás -UFG. hallbryon@gmail.com.
[2] Universidade Federal de Goiás -UFG. milennathomaz@discente.ufg.br

inter-relação permite distinguir poliedros semelhantes. Ser introduzido a poliedros antes de ser assunto de estudo formal com avaliação nos parece saudável prática educativa: algo é mostrado por ser interessante e bonito - e muito útil como recurso educativo. O poliedro é de dimensão três, com vértices, arestas e faces e que é definido pela maneira de acoplar faces em adjacência.

Uma primeira propriedade de poliedros é de cada vértice ser onde k arestas incidem, k variando; cada aresta vincula dois vértices e é compartilhada por duas faces. Com k arestas incidentes no vértice há k poliedros em união em torno do vértice.

A existência de famílias de poliedros como prismas e pirâmides pode ser mostrado mais cedo e em seguida os regulares. A fórmula de Euler $v - a + f = 2$ se aplicam facilmente a eles.

Destas propriedades, a dualidade é a mais completa. Dualidade descreve uma relação, uma correspondência de duas listas de componentes de uma estrutura. Em apresentação gráfica para alunos, a dualidade geométrica é claramente expressa. Apesar de existir dualidade no plano entre polígonos, a dualidade plena é melhor examinada em dimensão três. Discutimos este assunto na seção 2.

Dimensão três implica no uso de exemplos sólidos com volume. Uma maneira simples de dividir o espaço é com planos e com um mínimo de quatro planos podemos definir um objeto de volume limitado, o tetraedro. As fronteiras do tetraedro são triângulos, suas arestas e vértices. Em cada vértice de um poliedro incidem minimamente três arestas e, de modo análogo, cada face de um poliedro possui minimamente três arestas.

As faces do tetraedro são triângulos. Em geral as faces de um poliedro são polígonos e o **grau** da face do poliedro é o número de arestas da face. Com quatro planos no espaço o único poliedro construído é o tetraedro.

O acréscimo de uma face implica na inclusão de um plano que intercepta um tetraedro. Esta interseção pode ocorrer de duas maneiras: i) o plano pode decepar um vértice do tetraedro, interceptando as três arestas incidentes no vértice. Neste caso a parte decepada é um pequeno tetraedro; o outro poliedro criado tem duas faces triangulares vinculadas por três quadriláteros, e é um prisma triangular deformado. ii) um plano pode separar dois vértices do tetraedro dos outros dois vértices. Esta corte intercepta quatro arestas e produz um quadrilátero congruente nas duas partes da divisão, com mais um vértice para cada tornando-as pirâmides quadrilaterais convexos.

Logo com cinco planos se consegue definir mais poliedros adicionais mas estes sempre estarão em uma de duas classes: pirâmides quadrilaterais e prismas triangulares. Aos alunos são apresentados exemplos padrão destes poliedros: a pirâmide quadrada e o prisma triangular regular. Poliedros com cinco faces são denominados **pentaedros** e logo existem dois pentaedros. Para classificar os poliedros usa-se uma sequência não-crescente de números naturais correspondente ao número de arestas de cada face. Aos tetraedros, com quatro faces triangulares, associamos a sequência (3, 3, 3, 3). A pirâmide quadrada corresponde a (4, 3, 3, 3, 3) e o prisma triangular a (4, 4, 4, 3, 3)[3]

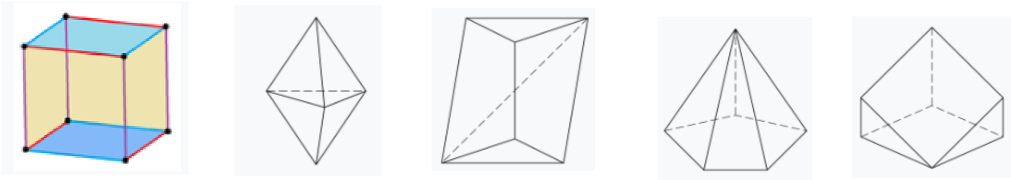
Conforme a idade de alunos, graus variados de poliedros podem ser apresentados. Uma primeira apresentação de poliedros seria introdutória e usaria exemplos simples para exemplificar os conceitos de face, aresta e vértice. Pirâmides, prismas e poliedros regulares como tetraedro e cubo devem ser apresentados, mas ocasião de ver poliedros em maior generalidade deve ser possível para todo aluno.

Ao aumentar o número de planos, gerando os hexaedros, os heptaedros etc. o número de poliedros aumenta rapidamente: sob certo método de classificação[4] há dez hexaedros e 34 heptaedros distintos. Mostrar aos alunos os tetraedros, pentaedros e hexaedros providencia um exemplo de definição com seu fascínio. Na Figura 1 consta-se que três dos hexaedros não são convexos. Um exemplo destes motiva questionamento de simplificações excessivas, como limites às maneiras de combinar os polígonos como faces. Os dez hexaedros não podem ser criados com o simples acréscimo de um plano de corte aos pentaedros. Os três hexaedros não convexos são produzidos a partir de tetraedros com dois planos que se interceptam no interior do tetraedro de três maneiras distintas. Em geral um prisma triangular ou pirâmide quadrilateral tem que ser muito "deformado", ie não regular para que com a inclusão de mais um plano gera o respectivo hexaedro. Estes fatos podem ser incluídos ou omitidos na abordagem do assunto, conforme a maturidade do público.

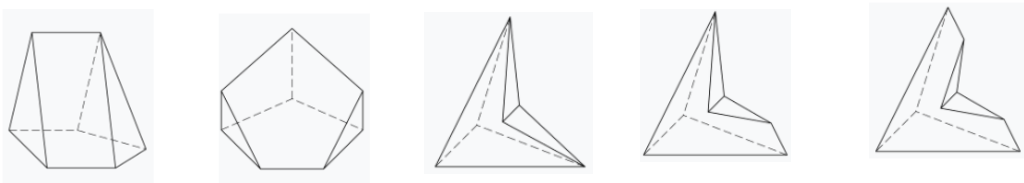
3 Sequências de poliedros e muito mais podem ser encontrados em Senechal (2013).

4 Em numericana.com/data/polycount.htm é usado enumeração que não diferencia tipos de triângulo, quadrilátero etc das faces, mas se baseia somente no posicionamento relativo entre estes polígonos. Todos são exibidos em Wikipedia (inglês) sob "Hexahedron".

Figura 1 - Os dez hexaedros



(4, 4, 4, 4, 4, 4) (3, 3, 3, 3, 3, 3) (4, 4, 3, 3, 3, 3) (5, 3, 3, 3, 3, 3) (4, 4, 4, 4, 3, 3)



(5, 4, 4, 3, 3, 3) (5, 5, 4, 4, 3, 3) (4, 4, 3, 3, 3, 3) (5, 5, 3, 3, 3, 3) (6, 6, 3, 3, 3, 3)

Fonte: Wikipedia - the free encyclopedia (Hexahedron)

Na Figura 1 consta-se um fato surpreendente: há dois poliedros com a mesma sequência numérica mas que são distintos. Os dois poliedros centrais, um acima do outro, têm ambos a sequência (4, 4, 3, 3, 3, 3). No poliedro de cima as duas faces quadrilaterais compartilham uma aresta; no correspondente de baixo compartilham dois vértices mas nenhuma aresta. Concluímos que os poliedros são distintos, apesar de compartilharem a mesma sequência descritiva. Tentativas de descrever os poliedros de modo "mais completo" seria uma atividade mentalmente lúdica e de cunho novo, não visto antes em aulas de matemática.

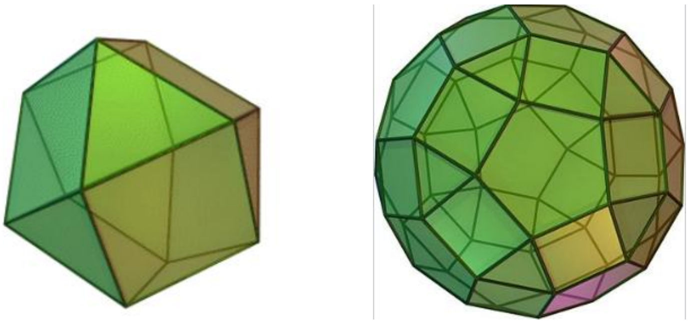
A apresentação padrão de poliedros tem sido de apresentar somente os cinco poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Apesar de serem úteis, limitar os poliedros aos regulares nos parece uma opção inadequada; exibir os dois pentaedros e dez hexaedros cria uma perspectiva nova sobre poliedros. Além dos poliedros regulares e os demais exibidos acima, ainda há famílias de poliedros que destacam pela beleza (e, portanto, interesse intrínseco). Entre estes destacamos os poliedros semi-regulares e os poliedros de Catalan. Os poliedros de Catalan serão apresentados na seção 2, enquanto os semi-regulares são poliedros de faces regulares nos quais a configuração de polígonos em torno de cada vértice é idêntica, como ocorre nos regulares, mas permitindo diversos polígonos distintos como faces.

Poliedros semi-regulares foram examinados com todo detalhe na Grécia por Arquimedes, 100 anos após a publicação de *Os Elementos* por Euclides. Na Figura 2 mostramos dois poliedros semi-regulares: o cuboctaedro e o rombicosidodecaedro. Em

Anais do 8º Encontro Goiano de Educação Matemática – VIII EnGEM – 29 de novembro a 01 de dezembro de 2022, Catalão, GO. ISSN 2176-3305

torno de cada vértice do cuboctaedro ha´dois quadrados e dois triângulos; no rombicosidodecaedro há dois quadrados, um triângulo e um pentágono. Os prismas e anti-prismas são semi-regulares, com ou dois quadrados e um polígono em cada vértice ou três triângulos equiláteros e um polígono em cada vértice. Já que há infinitos n-ágonos regulares, há infinitos possíveis poliedros semi-regulares. Treze deles que não sejam prismas nem anti-prismas são conhecidos como os poliedros de Arquimedes.

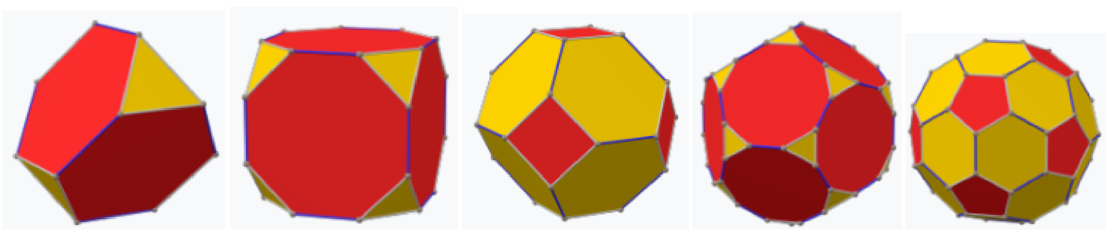
Figura 2 - o cuboctaedro e o rombicosidodecaedro



Fonte: Wikipedia (Sólido de Arquimedes)

Uma abordagem simples de apresentar os sólidos de Arquimedes é pelo apresentação de truncamento de vértices. Ao decepar um vértice de um poliedro regular, outro poliedto é gerado. Ao completar o processo em todos os vértices, gera-se um **regular truncado** - dos quais existem cinco ilustrados na Figura 3.

Figura 3 - os cinco regulares truncados: Tetraedro truncado; Cubo truncado; Octaedro truncado; Dodecaedro truncado; Icosaedro truncado



Fonte: Wikipedia - the free encyclopedia (Semi-regular polyhedra)

Tudo que deseja transmitir para alunos sobre poliedros pode ser realizado com uso de poliedros feitos de cartolina ou plástico. Para trabalhar com alunos dos anos 6º a 9º do ensino fundamental, a fabricação de poliedros rende muito como trabalho lúdico e gratificante. No ensino médio, discussões de poliedros e sua natureza podem ser usadas para explorar conceitos importantes da matemática. Nossa experiência indica que pode ser construído um poliedro de oito faces em 40 minutos e um de 16 faces em 90 minutos[5]. Este trabalho pode ser realizado na escola em horário de aula ou suplementado por trabalho individual em casa, quando possível. Cada aluno pode explicar muito sobre geometria fazendo uso do poliedro específico que ela/ele fez. Exemplos de poliedros notáveis mas construtíveis por alunos são apresentados em Figura 4. De esquerda à direita estes são o icosaedro truncado, o cubo *snub* ou cubo achatado e o icosidodecaedro truncado.

Figura 4 - icosaedro truncado, o cubo *snub* ou cubo achatado e o icosidodecaedro truncado.

Fonte: Laboratório de Educação Matemática - IME/UFG

Como o nome indica, o poliedro à esquerda na Figura 4, o icosaedro truncado, tem origem estimulante. Tome o poliedro regular clássico icosaedro, com suas 20 faces triangulares e doze vértices com cinco triângulos adjacentes em cada um. Imagine decepar um vértice do icosaedro de modo que o plano cortante corte cada um dos cinco triângulos do vértice. É fácil ver que o corte vai produzir um pentágono na posição do vértice e que cada um dos cinco triângulos será cortado num vértice, se tornando um quadrilátero.

Repita este processo em cada um dos doze vértices: produzirá doze pentágonos em lugar dos vértices do icosaedro e cada face triangular, com cortes próximos aos seus três vértices, se transformará num hexágono. O icosaedro truncado tem 20 faces hexagonais e doze pentagonais - e por coincidência é a base do nosso futebol!

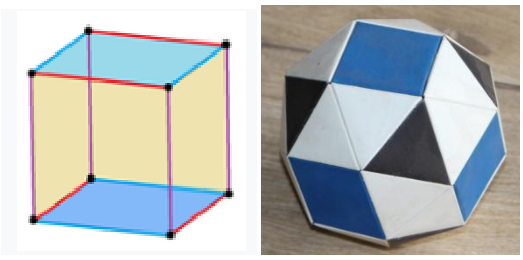
Para alunos de segundo grau outro resultado pode ser apresentado, exigindo como assunto a atenção maior de alunos. O resultado é de René Descartes do século XVII e versa sobre a soma dos ângulos exteriores de um poliedro. A soma de ângulos

5 Outros métodos de construção podem ser encontrados em Andrade (2014) e Senechal (2013)

externos de um polígono convexo é 2π ou 360^o - fato conhecido por alunos do 1^o ano do ensino médio. Repare que a circunferência de um círculo de raio um é 2π. A área superficial de uma esfera de raio um é 4π. Descartes provou que a soma dos ângulos externos de um poliedro é 4π ou 720^o.

Como exemplos simples examine Figura 5. À esquerda há um cubo de oito vértices. Em cada vértice há três quadrados, com ângulo de 90^o. $3 \times 90^o = 270^o$, o ângulo interno. O ângulo externo é $360^o - 270^o = 90^o$. Com oito vértices a soma dos ângulos externos é $8 \times 90^o = 720^o$. À direita tem-se o cubo achatado. Este em cada vértice tem quatro triângulos ($4 \times 60^o = 240^o$) e um quadrado (90^o) e, portanto, ângulo interno $240^o + 90^o = 330^o$ e, portanto, ângulo externo de $360^o - 330^o = 30^o$. Com 24 vértices dá-se um total de $24 \times 30^o = 720^o$.

Figura 5 - cubo de oito e cubo achatado



Fonte: (à esquerda) Wikipedia (Sólido de Arquimedes) À direita: Laboratório de Educação Matemática - IME/UFG

2 DUALIDADE ENTRE POLIEDROS

A dualidade no espaço tridimensional envolve uma correspondência entre componentes de um poliedro. Associamos objetos de dimensão dois (planos ou faces) a outros de dimensão zero (pontos ou vértices) e de haver outra associação de objetos de dimensão um (retas ou arestas) a outros objetos de dimensão um. Dado um poliedro P, este possui f faces poligonais, a arestas e v vértices. Sabemos que $f - a + v = 2$ se o poliedro for simples[6].

Seja dado um poliedro P. A correspondência que descrevemos implica associar a cada face de P um vértice do **poliedro dual** de P, **P***. A cada vértice de P associamos

6 A fórmula de Euler vale para sólidos sem furo, no sentido do toro ter furo. Para toros e outros sólidos há outras fórmulas.

Anais do 8º Encontro Goiano de Educação Matemática – VIII EnGEM – 29 de novembro a 01 de dezembro de 2022, Catalão, GO. ISSN 2176-3305

uma face de P* e a cada aresta de P outra aresta de P*. Se P tem *f* faces, *a* arestas e *v* vértices, P* terá pela correspondência *v* faces, *a* arestas e *f* vértices[7].

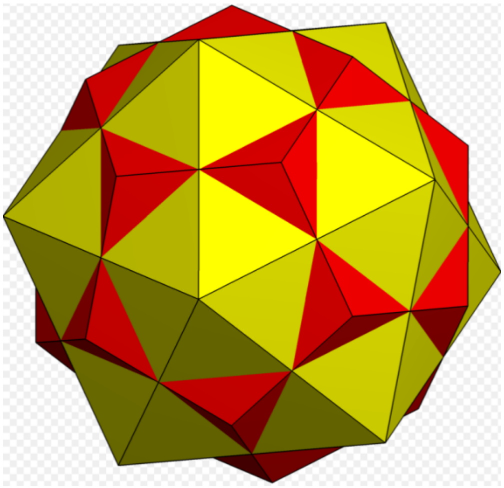
O poliedro dual de P* é o próprio poliedro P, ou seja (P*)* = P.

O dual de vértice é uma face - mas qual? Já que aresta corresponde a aresta, as arestas da face correspondem às arestas incidentes no vértice. Vértice de três arestas, o número mínimo, corresponde a triângulo; vértice de quatro arestas a quadrilátero, etc.

Três exemplos são comumente dados de dualidade: o tetraedro regular é dual de si próprio ou **auto-dual** (pois neste caso o número de vértices é igual ao número de faces); o cubo é dual do octaedro regular e vice-versa; o icosaedro regular é dual do dodecaedro regular e vice-versa.

Resumimos o caso da dualidade entre dodecaedro e icosaedro. O dodecaedro tem 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices com três arestas incidentes em cada um. O dual do dodecaedro, portanto, terá 20 faces triangulares, 30 arestas e 12 vértices com cinco arestas incidentes. Isso descreve com precisão o icosaedro, dual do dodecaedro. As 30 arestas do dodecaedro correspondem a 30 arestas perpendiculares a elas e interceptando nos pontos médios, ilustrado na Figura 5. A beleza da noção de dualidade, bem apresentada com exemplos concretos, serve como inspiração a alunos com algum interesse na matemática.

Figura 6 - icosaedro sobreposto a dodecaedro

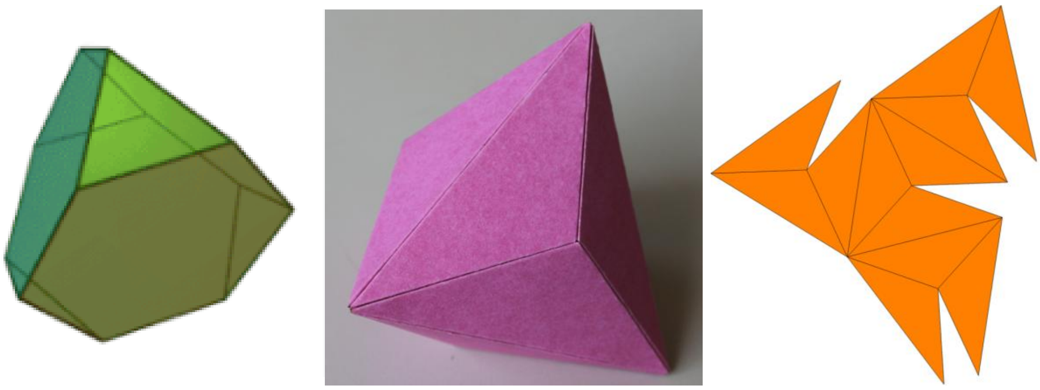


Fonte: Wikipedia - the free encyclopedia (Compound of dodecahedron and icosahedron)

7 Dualidade e sua exposição no ensino médio é tratada por Cabral (2019).

Mais interessante é um exemplo menos elementar: a dualidade do semi-regular tetraedro truncado e o triakis tetraedral. Ao decepar regularmente os quatro vértices de um tetraedro, cada vértice do tetraedro se torna uma seção triangular. Cada face triangular do tetraedro se torna um hexágono e há, portanto, oito faces: quatro triangulares (dos vértices do tetraedro) e quatro hexagonais (das quatro faces). Vide Figura 7 à esquerda.

Figura 7 - o tetraedro truncado, seu dual o triakis tetraedral e rede do triakis tetraedral



Fonte: (À esquerda e à direita) Wikipedia - the free encyclopedia. (Centro) Laboratório de Educação Matemática - IME/UFG

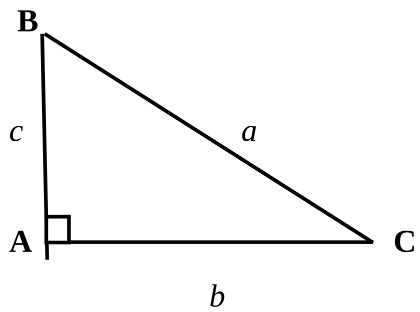
O tetraedro truncado tem 12 vértices e 12+6 arestas (12 dos quatro triângulos e seis do tetraedro original) = 18 arestas. Na figura dual P*, haverá oito vértices, 18 arestas e 12 faces. Cada vértice do tetraedro truncado corresponde a três arestas incidentes; por isso cada face de P* será um triângulo. Quatro faces do tetraedro truncado são triângulos e quatro hexágonos; portanto, no triakis tetraedral tem-se quatro vértices com três arestas incidentes e quatro vértices com seis arestas incidentes. Os poliedros duais de poliedros semi-regulares se chamam **poliedros de Catalan** e são treze distintos, um para cada poliedro de Arquimedes.

Poliedros de Arquimedes e Catalan não fazem parte do currículo escolar; porém sua exibição para alunos do ensino médio contribuiria para mostrar a riqueza em potencial da geometria com valor intelectual e artístico aos alunos.

3 O TEOREMA DE PITÁGORAS EM R^3

O teorema de Pitágoras, o presente em *Os Elementos* de Euclides, é um teorema muito conhecido e, portanto, serve como base para uma apresentação sem levantar dificuldades. Escreve-se $b^2 + c^2 = a^2$ referindo-se aos comprimentos *b*, *c* e *a* das três arestas do triângulo ΔABC com ângulo reto em A. Vide Figura 8.

Figura 8: Pitágoras em dimensão dois



Fonte: Autores do trabalho (2022)

O fato de $b^2 + c^2 = a^2$ neste caso de triângulo retângulo era conhecido no mínimo 2.500 anos antes de Pitágoras, na Mesopotâmia e Egito. A demonstração do fato aguardou mais dois milênios.

Este teorema fala da relação entre os comprimentos de duas arestas *b* e *c* de triângulo retângulo, denominadas catetos, em torno de um ângulo reto Â e de uma terceira aresta *a*, oposta ao ângulo reto Â, denominada hipotenusa de ABC. A soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos *b* e *c* é igual ao quadrado do comprimento da hipotenusa *a*.

Ao passar do plano para o espaço, vários conceitos generalizam em vários entendimentos da palavra. O espaço bidimensional do triângulo passa ao tridimensional do espaço. O triângulo ABC em R^2 é a figura mais simples possível não contida numa reta. Em R^3, três pontos não-colineares definem um plano e a passagem para dimensão três exige um quarto ponto não contido no plano dos primeiros três pontos. Ligando estes quatro pontos temos ABCD, o tetraedro e figura mais simples não contida num plano.

O ângulo reto Â de ΔABC define um triângulo especia, retângulo. Em R^3 temos uma figura tetraedral correspondente. Em um vértice do tetraedro considere as três arestas incidentes como mutuamente perpendiculares. Assim como o vértice A de ΔABC com ângulo reto é vértice especial, o vértice A do tetraedro com ângulo reto triplo é denotado vértice **tri-retangular**[8] e o tetraedro ABCD **tetraedro tri-retangular**. Neste caso as arestas BA, CA e DA são mutuamente perpendiculares entre si. Um tetraedro com um ângulo **tri-retangular** corresponde no espaço a um triângulo retângulo no plano. O triângulo possui duas arestas em torno de Â; o tetraedro tri-retangular em Â possui três faces (triângulos retângulos) em torno de Â.

O canto de uma sala de casa ou apartamento costuma corresponder a um tri-retangular. Marcando distâncias *b*, *c* e *d* a partir de sua interseção no canto ao longo das três arestas perpendiculares, visualizamos uma quarta face triangular, vértices BCD, que dificilmente poderia ser retângulo como os outros três triângulos. Tem-se uma figura análoga ao triângulo retângulo e face BCD é sua hipotenusa.

Ao passar de arestas em torno de um vértice especial A (ΔABC) para três faces de triângulos retângulos em torno de um vértice especial A, tri-retangular, fizemos uma passagem simples por certa perspectiva, mas completa e impressionante por outra. Do comprimento de arestas *b*, *c* e *a* passamos a falar de área de faces ACD, ABD, ABC (triângulos retângulos) e BCD (não retangular).

O teorema de Pitágoras em R^3 se formula assim: dado um tetraedro tri-retangular, a soma dos quadrados das áreas das faces triângulos retângulos é igual ao quadrado da área da face oposta ao ângulo reto triplo.

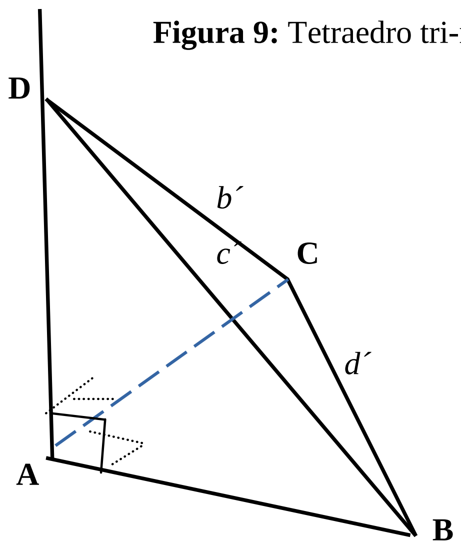
Consideramos um exemplo apto para apresentação na sala de aula do ensino médio: seja ABCD um tetraedro com arestas AB, AC e AD mutuamente perpendiculares de comprimentos respectivamente 3, 4 e 4 unidades. Vide Figura 9.

Temos três triângulos retângulos em torno do vértice A: ΔABC de área 3 x 4/2 = 6, ΔABD também de área 3 x 4/2 = 6 e ΔACD de área 4 x 4/2 = 8 unidades quadradas (u^2) . A soma dos quadrados destas áreas é 36 + 36 + 64 = 136 u^2.

---

8 Os detalhes desta construção podem ser encontrados em Court (1935). Court cita o teorema sem mencionar sua origem que parece ter acontecido no século XVII.

Figura 9: Tetraedro tri-retangular.

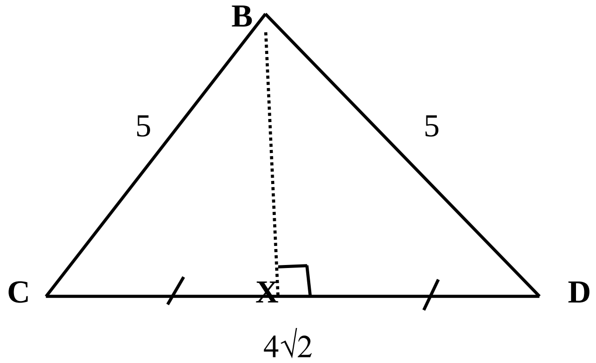


Fonte: Autores do trabalho (2022)

O triângulo BCD, oposto ao vértice tri-retangular, tem arestas que são as hipotenusas dos triângulos retângulos, de medidas 5, 5 e $\sqrt{32} = 4.\sqrt{2}$ e, portanto, é triângulo isósceles. (Figure 9)

O triângulo BCD tem altura BX com $\underline{BX}^2 = \underline{BD}^2 - \underline{DX}^2 = 25 - (2\sqrt{2})^2 = 17$ e a altura é $\sqrt{17}$. Tendo base CD, que mede $4\sqrt{2}$, a área de $\Delta BCD = \sqrt{17}.\ 4\sqrt{2}/2$ e a área ao quadrado é $(\sqrt{17}.2\sqrt{2})^2 = 136$ u^2. Vemos que a soma dos quadrados das áreas dos triângulos retângulos é igual ao quadrado da área do triângulo BCD, a hipotenusa do tetraedro tri-retangular, exemplificando a validade do teorema de Pitágoras para dimensão três.

Figura 10 - a face BCD do tetraedro



Fonte: Autores do trabalho (2022)

Anais do 8º Encontro Goiano de Educação Matemática – VIII EnGEM – 29 de novembro a 01 de dezembro de 2022, Catalão, GO. ISSN 2176-3305

Este é o exemplo dos mais simples porém completo de generalização/correspondência na geometria[9]

Resta uma pergunta: Pitágoras generaliza mais ainda, para dimensão quatro, cinco, …? Se uma aluna curiosa fizer esta pergunta, responda-a “Sim, generaliza, e do mesmo jeito que fizemos ao passar de dimensão dois para dimensão três”. Os detalhes existem em Manning (1956).

4 CONCLUSÕES

Exemplos na matemática de analogia, de correspondência e generalização são raros e fazem falta no ensino do uso da matemática. Poliedros e tópicos da geometria sólida preenchem esta lacuna de modo natural. A passagem de dimensão dois para dimensão três é, na experiência de alunos do ensino fundamental e médio, o exemplo mais simples desta passagem. Entendemos que é na geometria sólida que encontra-se os maiores alicerces dos conceitos apresentados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

Senechal, M. (Editora). **Shaping Space:** 1ª edição. New York City, EUA. Springer. 2013.

Court, N. A-C. **Modern Pure Solid Geometry:** 2ª edição. New York City, EUA. Chelsea Publishing Company. 1935

Manning, H. P. **Geometry of Four Dimensions:** 1ª edição. Providence, R.I., EUA. Dover Publication Inc. 1956.

Ribeiro de Jesus, A. G. **Pitágoras:** Estendendo a Dimensão do Teorema**:** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. UFSC. Florianópolis, SC. 2016.

Cabral, A. H. L. **Poliedros duais e algumas aplicações:** Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB. 2019.

Andrade, F. C. **Jujubas:** Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio: Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, UFRJ. Rio de Janeiro. 2014.

9 Após realizar este trabalho os autores viram que trabalho com Pitágoras em dimensão três na escola já fora tratado por Ribeiro de Jesus (2016).