VII EnGEM
Encontro Goiano de Educação Matemática
22, 23 e 24 de Maio 2019
Universidade Federal de Jataí
ISSN 2176-3305

CONTRIBUIÇÕES BABILÔNICAS: REDESENHANDO O MOVIMENTO LÓGICO E HISTÓRICO DO CÁLCULO

Duelci Aparecido de Freitas Vaz[1]

Mateus Almeida de Freitas[2]

Elivanete Alves de Jesus[3]

RESUMO

Este trabalho, inicialmente, mostra um pouco da produção Matemática da babilônia. Posteriormente, apresenta o modo como os astrônomos babilônicos antigos calculavam a posição de Júpiter a partir da área sob o gráfico da velocidade pelo tempo, o método do trapézio. Este resultado, obtido de interpretação de tábulas de argila babilônicas de 400 e 50 a. C., recentemente interpretadas, altera a História do Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que se acreditava que foram matemáticos europeus do século XIV que descobriram esse modo de operar, o que confirma o calibre da Ciência babilônica, altamente evoluída e prática. Deste modo, busca-se contribuir com o movimento lógico e histórico do Teorema Fundamental do Cálculo, fato fundamental para o ensino-aprendizagem da Matemática. A ação de percorrer o caminho que o cientista fez na determinação dos objetos científicos traz contribuições para o ensino de Matemática, uma vez que as ações mentais só podem ser produzidas pelo escolar se ele se apropriar desse modo de agir. Assim, este estudo mostra os motivos de sua criação, permanência e evolução no cenário científico.

Palavras- chave: Teorema Fundamental do Cálculo; História do Cálculo; Babilônicos.

1 INTRODUÇÃO

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) desempenha um papel relevante no mundo científico e é nuclear para o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de uma e mais de uma variável, sendo um elo entre derivada e integral. Neste texto, apresentamos fatos recentes que ajudam a tecer a história do CDI. Consideramos importante compreender o

[1] Pontifícia Universidade Católica de Goiás. duelci.vaz@gmail.com
[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Inhumas. mafmateus14@gmail.com
[3] Uni evangélica. elivanetea@gmail.com

movimento lógico e histórico dos objetos matemáticos, pois, a partir disso, poderemos resgatar o caminho percorrido pelos cientistas, ao longo do tempo, para determiná-los. Com isso, podem-se compreender os motivos de sua criação e permanência na ciência, mas, principalmente, este trajeto esclarece os caminhos pedagógicos a serem seguidos; afinal, em aula, para a compreensão do conceito, temos que planejar atividades que permitam que o aluno refaça o mesmo caminho percorrido pelo cientista.

Um fato histórico recentemente descoberto diz respeito à gênese do CDI e nos remete à Babilônia, uma sociedade muito desenvolvida do ponto de vista comercial e que dominava muito bem um saber-fazer que hoje chamamos de Matemática. Eves (2011) é mais preciso com relação a esse saber-fazer da civilização babilônica e o modo de armazenar seus conhecimentos que chegaram até nós:

> Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de meio milhão de tábulas de argila. Somente no sítio da antiga Nipur foram escavadas mais de 50 000 tábulas. Os museus de Paris, Berlim e Londres e as Universidades de Yale, Colúmbia e Pensilvânia têm excelentes coleções dessas tábulas. Estas são de tamanho variável, desde as pequenas de umas poucas polegadas quadradas até algumas do tamanho aproximado deste livro, sendo a espessura destas últimas, em torno de seu centro, de aproximadamente uma polegada e meia. Os escritos às vezes aparecem em apenas uma das faces da tabula, às vezes em ambas e frequentemente em seu contorno arredondado. Das cerca de meio milhão de tábulas, quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, constituídas que são de tábuas e listas de problemas matemáticos. (EVES, 2011, p. 59-60)

Como mostra Eves (2011), os babilônios eram extremamente habilidosos nos cálculos e catalogaram diversas tábuas com dados informativos para o desenvolvimento de contas específicas. O domínio do sistema de numeração foi um dos momentos importantes da história da Matemática. Nosso sistema de numeração foi criado por volta do século XII-XIII e trouxe novos modos de operar, fato crucial, pois o comércio necessitava de novas tecnologias (algoritmos, por exemplo) para o comércio. Desse modo, a criação de algoritmos permitiu avanços em outras áreas também; como informa Eves (2011), seu domínio era fato na sociedade babilônica:

> Mesmo as tábulas mais antigas mostram um alto grau de habilidade computacional e deixam claro que o sistema sexagesimal posicional já estava de longa data estabelecido. Há muitos textos desses primeiros tempos que tratam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos baseados nessas transações. As tábulas mostram que os sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de venda e endossos. Há tábulas que são documentos de empresas comerciais e outras que lidam com sistemas de pesos e medidas. (EVES, 2011, p. 60)

A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática:

> De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva (regras corretas para = 3) e se obtinha o volume de um cilindro circular reto como o produto da base pela altura. O volume de um tronco de cone e o de um tronco de pirâmide quadrangular regular eram calculados erradamente como o produto da altura pela semissoma das bases. Os babilônios também tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto. E conheciam o teorema de Pitágoras. (EVES, 2011, p. 60)

A álgebra babilônica era retórica e há tábuas indicativas de que eles sabiam resolver equações do segundo grau de uma maneira equivalente a dos dias atuais.

> Um problema babilônico pede o lado de um quadrado se a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número (sexagesimal) 14,30. A resolução do problema é descrita como se segue: "Tome metade de 1, que é 0;30; multiplique 0;30por 0;30, o que dá 0;15; some 0;15 a 14,30 obtendo 14,30;15. Este último é o quadrado de 29;30. A seguir some 0;30 a 29;30; o resultado é 30, que é o lado do quadrado". (EVES, 2011, p. 78)

Seguindo os passos descritos, a resolução babilônica equivale exatamente a resolver a equação quadrática $x^2 + px = q$ utilizando a fórmula x=$x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + \mathrm{q}} + p/2$.

> Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). (EVES, 2011, p. 60-61).

Segundo Eves (2011, p. 63), um fato marcante na Matemática babilônica está na tábua denominada de Plimpton 322, a mais notável das tábulas matemáticas babilônias já analisadas. O nome indica que se trata da tábula da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322. A tábula foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.) e os primeiros a representar seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945. Ela descreve várias ternas de números que posteriormente seriam chamadas de ternas pitagóricas, denominadas assim por acreditarmos, segundo documentos históricos, ser Pitágoras o primeiro a demonstrar que em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Até recentemente, acreditava-se que assuntos relacionados ao que hoje chamamos modernamente de Cálculo Diferencial e Integral, cuja origem está associada ao cálculo de áreas e de cálculo de retas tangentes, eram privilégio da Matemática grega e posteriormente da sociedade europeia, pois não havia nenhuma comprovação que refutasse tal fato. Muitas tábulas ainda existem e carecem de tradução e interpretação adequadas Isso pode mudar crenças e reconstruir caminhos, modificando a História.

Sabemos agora, graças às pesquisas de Ossendrijver (2016), que a História do CDI tem início em um tempo remoto, mas desde aquela época já se podia notar sua importância nas revoluções científicas, pois ele foi utilizado para resolver problemas complexos, mesmo que o formalismo da era grega ainda não tivesse sido concebido. A ciência Matemática e a própria palavra Matemática não existiam ainda, e suas origens provêm do grego, assim como a geometria ainda não tinha o mesmo significado atribuído pela civilização grega enquanto ciência rigorosa, mas ainda era geo (terra) e metria (medida).

Muito tempo depois da inauguração da Matemática grega, a descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo estabeleceu uma revolução, permitiu avanços significativos em diversas áreas de conhecimento, a partir século XVII e foram Newton e Leibniz que compreenderam esse resultado de forma independente. Na realidade, o cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz (COURANT, 2000, p.481).

O cálculo de área e o cálculo de tangentes são operações, de certa forma, dominadas pelos gregos antigos e estão no centro das abordagens do CDI. Arquimedes sabia calcular áreas e volumes de diversas figuras pelo método da exaustão que, em essência, é o mesmo utilizado pelos matemáticos modernos. Apolônio de Perga sabia calcular reta tangente às cônicas. Mas não há nenhum registro histórico mostrando que os gregos sabiam da ligação entre essas duas operações.

Apesar de possibilitar avanços científicos, a Matemática teve de esperar até o século XIX para que se criassem os fundamentos da análise e, dessa forma, pelo refinamento dado a Matemática, o CDI passou a ter local de destaque na Matemática moderna pela fundamentação teórica dada a ele. Segundo Greenspan e Benney (1973), o Cálculo é um triunfo da civilização moderna e tem sido o suporte do progresso científico e tecnológico desde sua criação. Para a educação científica, sua importância está nas suas aplicações:

> [...] Com efeito: o Cálculo é imprescindível para a formação do cidadão. Resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da dívida externa etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de variações de outras grandezas, interpretações de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamentos domésticos etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade. (REZENDE, 2013, p. 37)

No CDI, o TFC ocupa um papel de destaque, pois ele une seus dois problemas principais, a saber: o de calcular a reta tangente a uma curva e o de calcular a área sob uma curva que, durante muito tempo, foram estudados de modo independente, aparentemente sem nenhuma relação visível, e se desdobram em diversos outros equivalentes para funções de uma ou mais variável.

O Teorema Fundamental do Cálculo uniu o que chamamos modernamente de Deriva e Integral. Machado (1998) explica:

> [...] O Cálculo Diferencial e Integral trata de questões relacionadas com a medida da rapidez com que as grandezas aumentam ou diminuem, os objetos se movem ou as coisas se transformam. Tratam também das questões envolvendo a interpretação de grandezas que variam continuamente como se variassem através de pequenos patamares onde se manteriam constantes, conduzindo a somas com um número cada vez maior de parcelas cada vez menores. A medida da rapidez de variação conduz à noção de derivada; o estudo das somas com muitas pequenas parcelas conduz à noção de integral. Ambas as noções têm que ver, em suma, com a aproximação de curvas por retas, ou de fenômenos não lineares por descrições lineares, recurso fundamental em múltiplas e distintas situações. O processo através do qual uma curva é aproximada por uma reta que lhe é tangente é a diferenciação ou derivação; a aproximação de curvas por retas como a que tem lugar, por exemplo, no cálculo de áreas, dá origem ao processo de integração. (MACHADO, 1998, p.148)

Até pouco tempo, acreditava-se que o cálculo da área sob uma curva fosse uma descoberta realizada no século XIV e que uma de suas aplicações direta daria, entre outras coisas, o comprimento de uma curva. Porém, descobertas recentes obtidas de tábulas cuneiformes mudaram essa história e lançaram nosso olhar de volta à produção matemática da sociedade babilônica.

2 OS BABILÔNICOS E O CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL

Os povos babilônicos, por meio das escritas cuneiformes em tábuas de argila, deixaram diversos registros de suas realizações, mostrando que tinham uma Matemática poderosa. São tantas tábuas de argila que ainda levará um longo período para se desvendar todas.

> Os documentos matemáticos são tão numerosos e vem de tempos tão diferentes que seria necessário um longo espaço de tempo para reconstruir o desenvolvimento da matemática da Mesopotâmia (o que não acontecesse com a matemática do antigo Egito). [...] Vários milhares esperam ser decifrados e editados em uma linguagem moderna. (WUSSING, 1979, p. 20)

Assim, não há alternativa para o historiador a não ser investigar: “o historiador assemelha-se a um equilibrista que andasse em fio de aço preso entre dois distantes edifícios, a uma altura estonteante, sem ter por baixo a rede protetora que lhe amorteça a possível queda” (BICUDO, 2004, p.58). Realmente, fatos novos podem modificar interpretações e teses amplamente aceitas; este é o caso da pesquisa de Ossendrijver (2016) que descobriu que astrônomos babilônicos desenvolveram muitos conceitos importantes que ainda estão em uso. Ossendrijver traduziu várias tábuas de argilas em escrita cuneiforme do período que vai de 350 a 50 a.C. e descobriu que algumas delas continham estratégias para calcular a órbita de júpiter, baseada no cálculo da área do trapézio sob um gráfico. Acreditava-se que tal técnica havia sido uma criação de 1400 anos depois, em Oxford. Essa descoberta mudou também as ideias de como os babilônicos influenciaram a ciência ocidental.

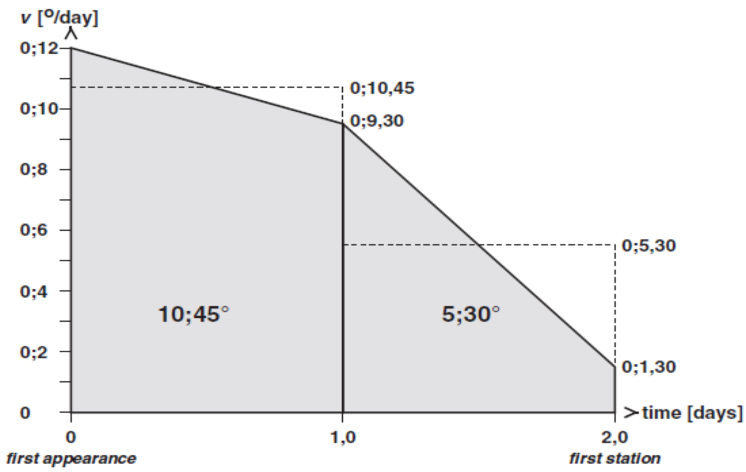
Segundo Ossendrijver (2016), há séculos os astrônomos traçaram cuidadosamente o movimento da lua e planetas nas antigas cidades da Babilônia. Júpiter foi um planeta favorito devido ao fato de representar, segundo as tradições dos babilônicos, a essência do deus Marduk. Astrônomos babilônicos registraram sistematicamente suas observações nas tábuas cuneiformes. Usaram geometria elementar para traçar o movimento de Júpiter, uma conquista tão significativa e que só agora foi descoberta com seus devidos créditos.

Os astrônomos babilônicos empregaram uma espécie de pré-cálculo ao descrever o movimento de Júpiter no céu noturno em relação às estrelas mais distantes. Esse é um achado verdadeiramente surpreendente, uma descrição que, devidamente interpretada, fornece o gráfico da velocidade pelo tempo, um conceito moderno.

Cerca de 340 tábulas babilônicas dessa coleção possuem dados sobre as posições planetárias e lunares, dispostas em linhas e colunas, como uma planilha. Outras 110 são processuais, com instruções que descrevem operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação), utilizadas para calcular as posições dos objetos celestes. Um conjunto de quatro tábuas sobre a posição da Júpiter preserva um procedimento de cálculo complicado que dá instruções para estimar a área sob uma curva.

Para calcular a posição de Júpiter, os babilônicos focaram no seu movimento ao longo da Eclíptica, que é o caminho que o sol parece traçar tendo como referência as estrelas. Os babilônicos mediram o movimento diário de Júpiter e as observações produziram um trapezoide (Figura 1), cuja área representava o movimento de Júpiter.

Figura 1 - Representação do movimento de Júpiter



Fonte: Ossendrijver (2016, p. 483).

Embora as tábuas não mostrem nenhuma figura trapezoide, os cálculos comprovam que os babilônicos executaram o cálculo de área de trapézios para realizar a descoberta astronômica:

> Para o primeiro intervalo de 60 dias, v_0 = 0; 12 °/ d (= 12/60) e v_{60} = 0;9,30°/d (=9/60+30/602). Sua soma é multiplicado por 0;30 (= 1/2), resultando em um valor médio (v_0 + v_{60})/2 = 0;10,45°/ d, que é multiplicado por 1,0 (= 60) dias, resultando em um deslocamento total de: S = 1,0 . (v_0 + v_{60}) / 2 = 10; 45 °. Para o segundo intervalo, v_{60} = 0; 9,30 ° / d e v_{120} = 0; 1,30 ° / d (= 1/60 + 30/60^2), levando a (v_{60} + v_{120}) / 2 = 0; 5,30 ° / d e S = 5; 30 °. A soma dos deslocamentos totais, 10, 45 ° + 5, 30 ° = 16, 15 °, é declarada como a distância total descrita por Júpiter ao longo da eclíptica em 120 dias. Em outras palavras, a longitude eclíptica de Júpiter após 60 e 120 dias é calculada como $\lambda_{60} = \lambda_0$ + 10; 45 ° e $\lambda_{120} = \lambda_0$ + 16; 15 °, respectivamente. (OSSENDRIJVER, 2016, p. 483).

Segundo Ossendrijver (2016), a astronomia babilônica empregava uma base sexagesimal, isto é, um sistema posicional em que os números são representados como sequências de dígitos entre 0 e 59, cada um associado a uma potência de 60. Na notação moderna comumente usada, todos os dígitos são separados por vírgulas, exceto o dígito correspondente a 60, que é separado do próximo 60^{-1} por um ponto e vírgula (;), para separar a parte decimal. Para o primeiro intervalo de 60 dias, v_0 = 0; 12 °/d (= 12/60) e v_{60} = 0;9,30°/d (=9/60+30/60^2). Sua soma é multiplicada por 0;30 (= 1/2), resultando um valor médio ($v_0 + v_{60}$) /2 = 0;10,45°/ d, que é multiplicado por 1,0 (= 60) dias, resultando um deslocamento total de: S = 1,0. (v0 + v60) / 2 = 10; 45 °.

Isso comprova não só a perspicácia desses primeiros astrônomos, como também antecede comprovadamente, de certa forma, a invenção do Cálculo Diferencial do século XVII. Um dos prováveis motivos para este estudo realizado pelos babilônios é o fato de que eles acreditavam que todos os acontecimentos terrestres, como o tempo, a produção agrícola e o nível dos rios e o clima eram regidos pelo movimento dos planetas e estrelas.

3 REFLEXÃO FINAL

Em 400 a. C., astrônomos babilônios tinham elaborado um sistema de coordenadas utilizando a eclíptica, a região do céu através da qual o sol e os planetas se movem. O que não estava claro era se os babilônios tinham um conceito de objetos no espaço abstrato matemático. Agora decodificados, estes textos mostram que sim. O método trapezoidal exige compreender a velocidade com que Júpiter se move e, em seguida, marcar esse movimento num sistema gráfico para obter a curva que determina seu trajeto. Descobrir a área de trapézios sob esta curva dá uma aproximação razoável de quantos graus o planeta se moveu em um determinado período.

O movimento lógico e histórico do desenvolvimento do CDI nos dá uma ideia sobre as potencialidades desse conhecimento para diversas linhas científicas. Dessa forma, ressaltamos que os babilônicos contribuíram para a criação do CDI, em sua gênese, estudando a órbita de Júpiter, reposicionando os fatos que nos ajudam a reconstruir a História. Isso tem consequências para a educação matemática, uma vez que o caminho percorrido para a formalização do conhecimento matemático é modificado e enriquecido. Consideramos que essas descobertas são importantes para motivar o aluno nos processos de ensino-aprendizagem. Além disso, tais descobertas mudam também a interpretação, até então vigente, que, quase sempre, nos informa que o berço das descobertas científicas é aquele de matriz eurocêntrica, pois mostra o elo entre as civilizações e confirma que há um movimento de influências culturais contínuas.

REFERÊNCIAS

BICUDO, I. Peri apodeixeos de demonstratione. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiane; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação matemática pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.

COURANT, Richard. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. 621p.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2011.

GREENSPAN, Harvey Philip; BENNEY, David J.; TURNER, James E. **Calculus:** an introduction to applied mathematics. McGraw-Hill Ryerson Ltd, 1986.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática.** As Concepções de Conhecimento e Inteligência, e a Prática Docente. São Paulo: Editora Cortez, 1995.

OSSENDRIJVER, M. Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph. **Science,** v. 351, Issue 6272, p. 482-484, 29 Jan 2016. DOI: 10.1126/science.aad8085.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. 450 f. Tese (Doutorado)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

WUSSING, H. **Palestras sobre a História da Matemática.** Berlim, editora alemã das ciências, 1979.