

## A EXPLORAÇÃO DO TEOREMA DE STEWART NA GEOMETRIA DINÂMICA COM GEOGEBRA

Lucas Santos Teixeira<sup>1</sup>

Iara Martins Coelho<sup>2</sup>

Luis Andrés Castillo B.<sup>3</sup>

Ivonne C. Sánchez S.<sup>4</sup>

### RESUMO

Nas últimas décadas os softwares de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, vêm sendo utilizados de maneira recorrente para apoiar as aulas de matemática para o ensino. Neste trabalho objetivamos apresentar uma abordagem do teorema de Stewart com um objeto de aprendizagem elaborado no GeoGebra. Nos baseamos nos fundamentos do uso das tecnologias digitais junto à História da Matemática para o Ensino, onde são tratadas as primeiras ideias do uso combinado de Tecnologia Digital à História da Matemática. Nas duas seções seguintes, justifica-se a utilização da História da Matemática, da Tecnologia Digital e do GeoGebra, no desenvolvimento deste trabalho. Foram discutidas as formas de uso do GeoGebra como ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático, como uma ferramenta de visualização e como ferramenta de descoberta na demonstração e exploração do teorema de Stewart materializada por informações históricas com o GeoGebra.

**Palavras-chave:** Teorema de Stewart; GeoGebra; Tecnologias Digitais; História da Matemática; Ensino.

### 1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Segundo Mendes (2015, p. 127) expressa que o uso da história da matemática em sala de aula permite ao estudante aprender matemática conectada com as necessidades de “contextualização, problematização, interdisciplinaridade, transversalidade”, e ainda mais quando a atividade de aprendizagem que pode ser

---

<sup>1</sup> Universidade Federal do Tocantins. E-mail: [teixeira.lucas@mail.uft.edu.br](mailto:teixeira.lucas@mail.uft.edu.br)

<sup>2</sup> Universidade Federal do Tocantins. E-mail: [martins.coelho@mail.uft.edu.br](mailto:martins.coelho@mail.uft.edu.br)

<sup>3</sup> Universidade Federal do Tocantins. E-mail: [luiscastleb@gmail.com](mailto:luiscastleb@gmail.com)

<sup>4</sup> Universidade Federal do Pará. E-mail: [ivonne.s.1812@gmail.com](mailto:ivonne.s.1812@gmail.com)

materializada com apoio das Tecnologias de Digitais da Informação e Comunicação (TDIC).

Em função desse potencial que as Tecnologias Digitais têm para amplificar as ações pedagógicas da História da Matemática, pode ser uma causa do surgimento de tendências híbridas na História da Matemática como campo de pesquisa na Educação Matemática. Segundo Mendes (2022) isto ocorre a partir de discussões de pesquisadores nos espaços acadêmicos com o intuito de constituir uma aliança entre História e Tecnologia no Ensino de Matemática, cujo foco são as potencialidades que atividades baseadas em informações da História da Matemática (HM) e mediadas pelas Tecnologias Digitais podem contribuir com as ações docentes na sala de aula (SOUSA, 2020; SOUSA; ANDRADE, 2016).

Num mapeamento realizado por Sánchez, Castillo e Mendes (2021) teve como o propósito de compor um cenário do uso das Tecnologias Digitais nas pesquisas de História da Matemática para o ensino de Matemática. O objeto de estudo nesta pesquisa foram as teses e dissertações disponíveis no acervo do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat<sup>5</sup>), categorizadas nas modalidades de pesquisa História e Epistemologia da Matemática (HEpM), História da Educação Matemática (HEdM) e História para o Ensino da Matemática (HEnM), modalidades conceituadas por Mendes (2015).

Na referida pesquisa foi constatado que as Tecnologias Digitais mais usadas nas pesquisas analisadas desde a década 1990, são os *softwares* de Geometria Dinâmica, especificamente o GeoGebra e que a maioria destas pesquisas foram encontradas nas pesquisas sobre História para o Ensino da Matemática (HEnM) (SÁNCHEZ; CASTILLO; MENDES, 2021). Um fato que também se evidencia é que nas pesquisas e experiência desenvolvidas por Sousa (2021) na qual argumenta que o GeoGebra tem papel fundamental para a consolidação de proposta de aliança entre História para o Ensino da Matemática e as Tecnologias Digitais, neste caso com o referido software de Geometria Dinâmica.

Pelo exposto anteriormente, vemos que é necessário promover mais esforços por processos de ensino da matemática mediado pelo uso da História da Matemática e as Tecnologias Digitais, onde estas não sejam usadas de maneira instrumental (BORBA; PENTEADO, 2019), senão, um uso que apresente possibilidades que levem aos

---

<sup>5</sup> <https://www.crephimat.com.br>

estudantes a refletir e produzir conhecimento junto a seus colegas e professor numa atividade conjunta.

Neste trabalho, temos como objetivo descrever as potencialidades conceituais e didáticas de atividades baseadas em informações históricas a respeito da demonstração do Teorema de Stewart para o ensino da matemática por meio do objeto de aprendizagem (OA) com o potencial de dinamizar a referida demonstração. Nos seguintes apartados, descreveremos o que chamamos de objetivos de aprendizagem, o modo de usar o GeoGebra na exploração dos OA. Depois quem foi Matthew Stewart, seu teorema e demonstração clássica. Logo, a descrição do objeto de aprendizagem (OA) elaborado para explorar a demonstração com GeoGebra, e finalmente, as considerações finais.

## 2 OBJETOS DE APRENDIZAGEM

Para Koper (2003) um Objeto de Aprendizagem (OA) é um recurso virtual disponível para que o professor os utilize com o intuito de contribuir com a aprendizagem dos seus alunos. Para Santos (2007) os OA são como qualquer material digital que oferece informações para a construção de conhecimento, estejam essas informações em forma de uma imagem, página HTML, animação ou simulação. Neste artigo, nos referimos que um OA é “um recurso virtual que pode ser usado e reutilizado para apoiar a aprendizagem, por meio de atividade interativa na forma de simulações ou animações (Kalinke *et al.*, 2015)”.

Castillo e Gutierrez (2020) mostraram que os OA elaborados com GeoGebra têm suas vantagens e características que fazem se destacar dos elaborados por outras Tecnologias Digitais, já que permitirá aos alunos gerar conjecturas e validá-las por descobertas de exploração e manipulação do recurso de um jeito mais dinâmico e interativo graças as suas ferramentas e funcionalidades dinâmicas (CASTILLO; GUTIÉRREZ; SÁNCHEZ, 2020). Além disso, este tipo de recurso na interface do GeoGebra permite explorar de maneira dinâmica os conteúdos que o professor tem a intenção de ensinar e possibilita estabelecer vinculações entre as várias formas de representação dos conceitos matemáticos. No seguinte apartado descrevemos os usos deste OA com GeoGebra.

### 3 USOS DO GEOGEBRA

Neste apartado nos fundamentamos nas ideias do Prieto (2016), este apresenta uma categorização sobre o uso do GeoGebra em situações de ensino e aprendizagem da Matemática, elas se descrevem a continuação:

Como *ferramenta de visualização*, o GeoGebra pode ser usado para oferecer uma perspectiva dinâmica de conceitos e relações matemáticas, a partir de múltiplos registros de representação. Desta forma, os sujeitos têm a possibilidade de \ “ver” e \ “explorar” conhecimentos matemáticos muitas vezes inacessíveis com outros dispositivos. Por exemplo, ao modificar a representação geométrica de uma função real por meio de arrastar, os parâmetros associados à fórmula correspondente (registro numérico-algébrico) são modificados em tempo real. Da mesma forma, quando você modifica os parâmetros de uma função real na janela de álgebra, a representação gráfica associada se ajusta imediatamente.

Como *ferramenta de construção*, este *software* permite a criação e manipulação de construções geométricas em 2D e 3D, com altos níveis de liberdade e consistência, favorecendo assim o estudo de objetos de geometria euclidiana e analítica.

Como *ferramenta de descoberta*, o GeoGebra pode favorecer a descoberta de padrões, regularidades ou invariantes matemáticos (por exemplo, invariantes geométricos) nos objetos exibidos em sua interface, o que aproxima os alunos do conhecimento matemático institucionalizado.

Como *ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático*, esta tecnologia digital oferece aos professores um ambiente amigável para o desenvolvimento de materiais dinâmicos através dos quais eles podem representar e comunicar conceitos matemáticos e relacionamentos com seus alunos.

Entendemos que estes modos de usar o GeoGebra descritos por Prieto (2016) permite uma visão mais ampla de como os professores devem integrar este *software* de matemática dinâmica em suas aulas de classes com diferentes propósitos.

### 4 MATTHEW STEWART E SEU TEOREMA

O matemático escocês Matthew Stewart (Figura 1) nasceu no ano de 1717 em Rothsey e faleceu no ano de 1785 em Edimburgo. Stewart estudou na Universidade de Glasgow, onde foi aluno de Robert Simson. Depois de completar sua formação, ele

frequentou algumas palestras dadas por Colin MacLaurin na Universidade de Edimburgo. Como consequência disso, uma relação amigável entre ambos os matemáticos, anos depois, Stewart ensinou matemática naquela universidade e mais tarde, ele ocupou a cadeira desta especialidade com a morte de MacLaurin.

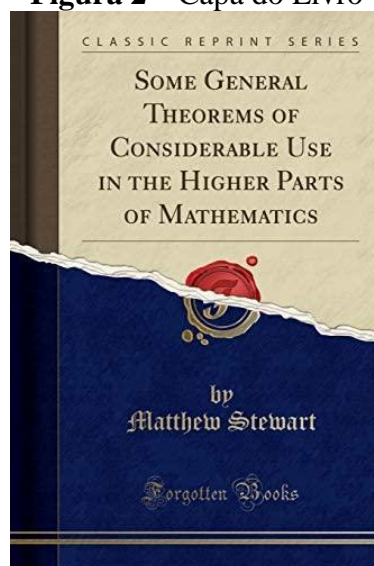
**Figura 1** – Matthew Stewart (1717-1785)



Fonte: Google imagens

Stewart estava interessado em alguns problemas de mecânica celeste, especialmente trajetórias orbitais e distúrbios produzidos entre um planeta e outro. Adquiriu certo prestígio e reconhecimento no meio acadêmico após a publicação de sua obra “*Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics*” (Figura 2), alguns teoremas gerais comumente usados em vários ramos da Matemática Superior.

**Figura 2** – Capa do Livro



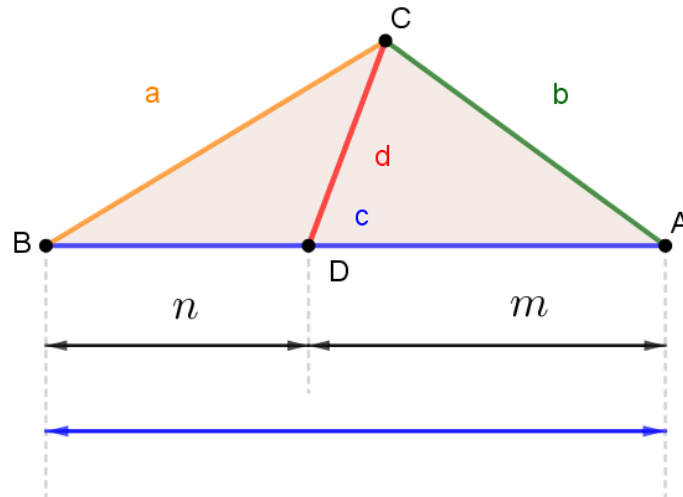
Fonte: Google imagens

O Stewart sempre demonstrou grande preocupação intelectual com questões geométricas teóricas, o que o levou a enunciar o teorema que leva seu nome. Ele era um membro do *Royal Society*, a sociedade erudita mais antiga do Reino Unido e uma das mais antigas da Europa. Tornou-se pastor protestante e deu seu ministério religioso em Roseneath, condado de Dumbartonshire, um dos conselhos unitários em que a Escócia está administrativamente dividida.

Seu filho, Dugald Stewart, continuou o trabalho realizado por seu pai, dedicando-se tanto à matemática quanto à filosofia. Vários estudiosos conjecturam que este teorema pode ter sido provado por Arquimedes de Siracusa, no século III a.C. É também chamado de teorema apolíneo ou mediano, para o caso particular desta notável linha do triângulo.

Especificamente o Teorema de Stewart expressa que para todo  $\triangle ABC$  cujos lados medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e a ceviana de comprimento  $d$  e  $D$  o ponto pertencente à reta suporte, temos que  $a^2m + b^2n - d^2c = mnc$  (Figura 3).

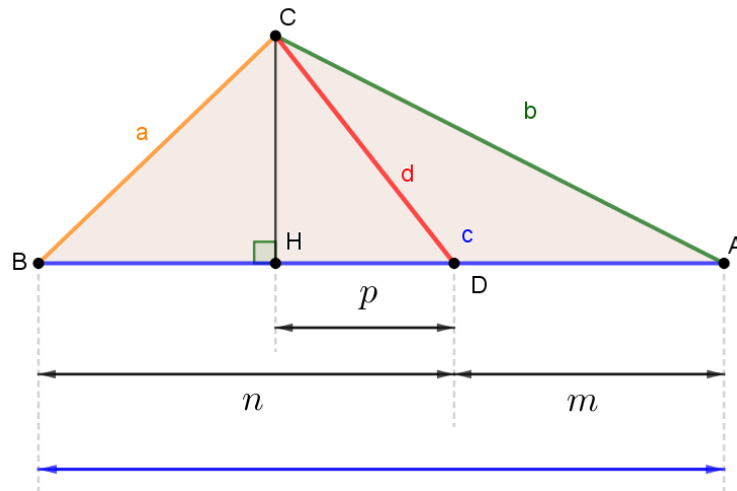
**Figura 3** – Teorema de Stewart



Fonte: Elaboração própria dos autores

A Demonstração deste teorema parte de considerar o  $\triangle ABC$ , de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , ceviana de comprimento  $d$  em relação ao lado  $\overline{BC}$  e altura  $h$ , onde  $\overline{DH} = p$ ;  $\overline{BD} = n$  e  $\overline{DA} = m$  (Figura 4).

Figura 4 – Teorema de Stewart



Fonte: Elaboração própria dos autores

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos  $\triangle BCH$  e  $\triangle CHD$  respectivamente, obteremos,

$$a^2 = h^2 + (n - p)^2$$

$$a^2 = h^2 + n^2 - 2np + p^2$$

$$h^2 = a^2 - n^2 + 2np - p^2 \quad (1)$$

$$d^2 = h^2 + p^2$$

$$h^2 = d^2 - p^2 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos,

$$d^2 - p^2 = a^2 - n^2 + 2np - p^2$$

$$a^2 = d^2 + n^2 - 2np \quad (3)$$

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo  $\triangle ACH$  tem-se que,

$$b^2 = h^2 + (m + p)^2$$

$$b^2 = h^2 + m^2 + 2mp + p^2$$

$$h^2 = b^2 - m^2 - 2mp - p^2 \quad (4)$$

Substituindo (2) em (4), obtemos,

$$d^2 - p^2 = b^2 - m^2 - 2mp - p^2$$

$$b^2 = d^2 + m^2 + 2mp \quad (5)$$

Montando o sistema de equações utilizando as relações (3) e (5),

$$a^2 = d^2 + n^2 - 2np$$

$$b^2 = d^2 + m^2 + 2mp$$

No sistema, multiplicamos a primeira equação por  $m$  e a segunda equação por  $n$ , temos que,

$$a^2m = d^2m + n^2m - 2mnp$$

$$b^2n = d^2n + m^2n + 2mnp$$



Somando as duas equações termo a termo, resulta que,

$$\begin{aligned} a^2m + b^2n &= n^2m + m^2n + d^2m + d^2n \\ a^2m + b^2n &= mn(m + n) + d^2(m + n) \end{aligned}$$

Como  $c = m + n$ , substituindo a mesma na última equação concluiremos o resultado do teorema,

$$a^2m + b^2n = mnc + d^2c$$

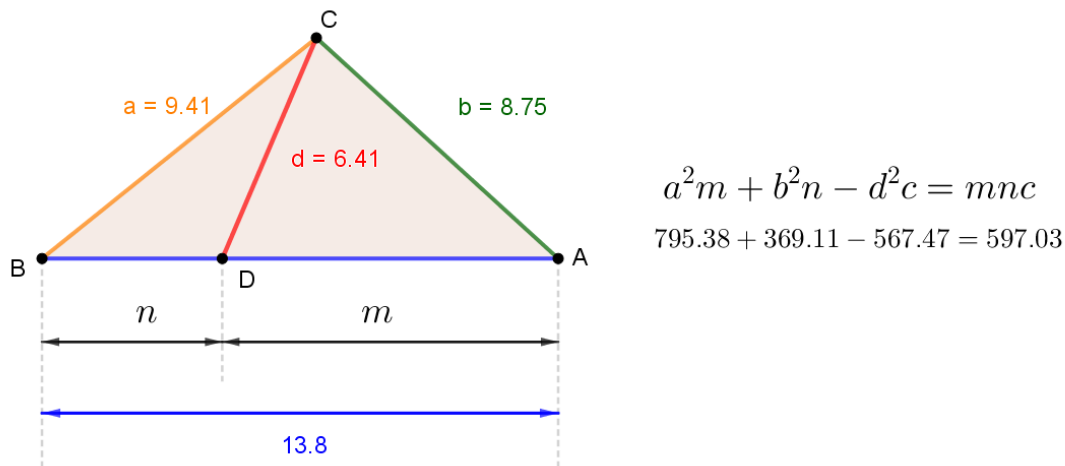
$$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$$

No seguinte apartado apresentamos um OA para a exploração do teorema e a demonstração do mesmo com ajuda do GeoGebra.

## 5 A EXPLORAÇÃO DO TEOREMA DE STEWART NO GEOGEBRA

Lembremos que o Teorema de Stewart expressa que para todo  $\Delta ABC$  cujos lados medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ ; e a ceviana de comprimento  $d$  e  $D$  o ponto pertencente à reta suporte, temos que  $a^2m + b^2n - d^2c = mnc$ . Na figura 5 apresentamos nosso Objeto<sup>6</sup> de Aprendizagem para a exploração do referido teorema .

**Figura 5** – Objeto de Aprendizagem sobre Teorema de Stewart no GeoGebra



Fonte: Elaboração própria dos autores

Este objeto de aprendizagem no GeoGebra foi pensado para ser usado como *ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático*, como uma *ferramenta de visualização* e como *ferramenta de descoberta* na demonstração do teorema de Stewart. Para isto, precisaremos de uma funcionalidade dinâmica dos *softwares* próprio de geometria dinâmica, o arrastar ou *dragging* em inglês, com o qual

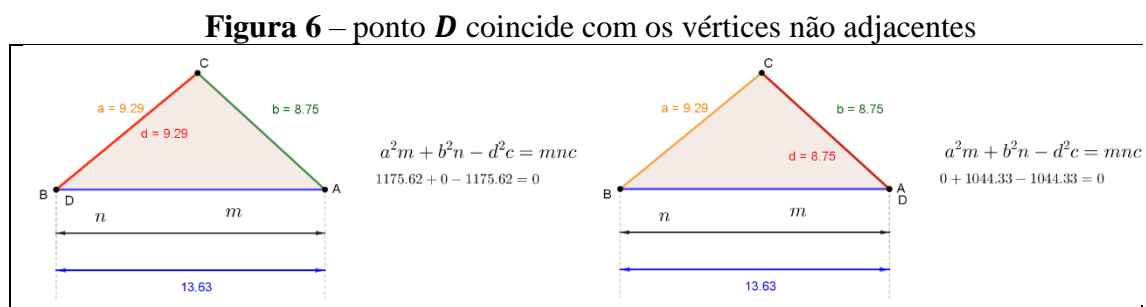
<sup>6</sup> O recurso pode ser acessado no link a seguir: <https://www.geogebra.org/m/uaq2zavh>



segundo Sáenz-Ludlow (2018, p. 202) agiliza-se a manipulação de figuras geométricas ou elementos que pertencem a esta, de maneira tal, que com uma manipulação intencional e experimentação planejada, possam ser observadas relações variantes e invariantes entre os elementos de uma figura geométrica, ou qual facilita a formação de conjecturas, bem como sua validação.

Neste sentido, descrevemos a continuação uma manipulação e exploração intencional sugerida para que estudantes e professores usando nosso OA, com o propósito de entender o teorema de Stewart, a sua demonstração e outras possíveis conjecturas em função da posição do extremo da ceviana que não é vértice e dos lados do triângulo. Para arrastar no GeoGebra se realiza mediante a ferramenta *Mover* (PINHO; MORETTI, 2020).

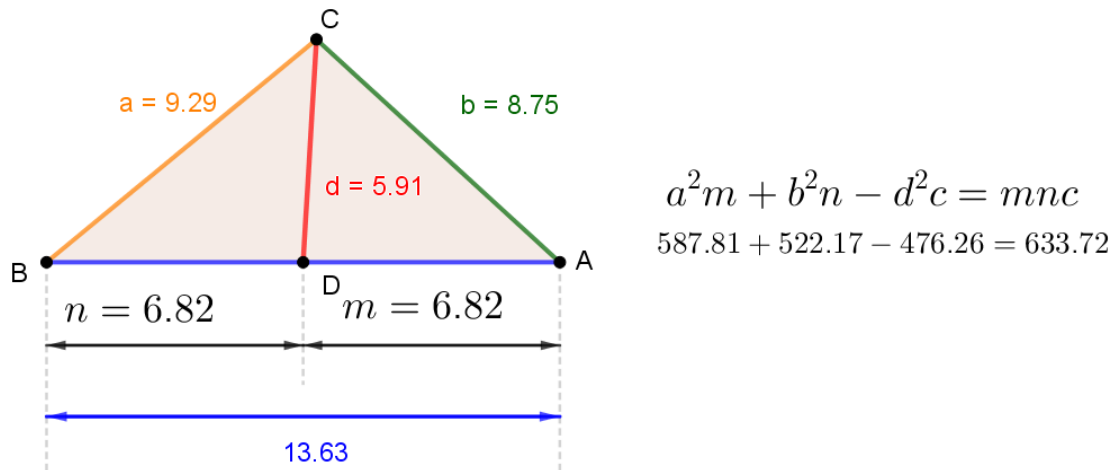
Estas manipulações e explorações são provocadas por problematizações em forma de perguntas, nos termos de Mendes (2009), questões em aberto, por exemplo, o teorema de Stewart se cumpre quando o ponto  $D$  coincide com os vértices adjacentes? Explorando nosso recurso obtemos dois casos quando  $D$  coincide com  $A$  e com  $B$  (Figura 6).



Fonte: Elaboração própria dos autores

Nesta exploração pode-se constatar que o teorema ainda se cumpre, e que o produto no primeiro caso  $b^2n = 0$  e  $mnc = 0$ , logo a diferença de  $a^2m - d^2c = 0$ . No segundo caso  $a^2m = 0$  e  $mnc = 0$ , logo a diferença de  $b^2n - d^2c = 0$ . Encerrando a questão anterior, abrem outras, por exemplo, o que acontece quando o ponto  $D$  coincide com o ponto médio do segmento  $AB$ ? (Figura 7)

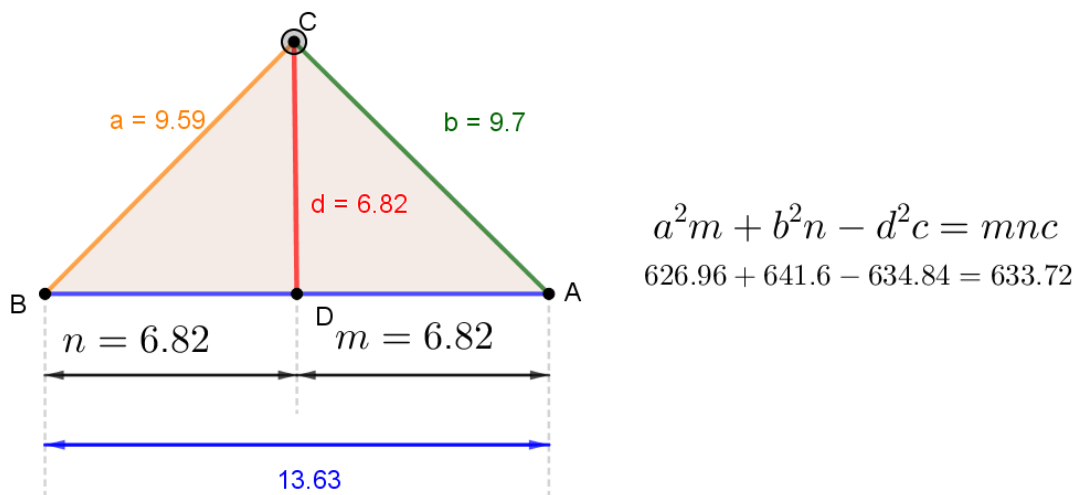
**Figura 7** – ponto **D** coincide com o ponto médio do segmento AB



Fonte: Elaboração própria dos autores

No caso da figura anterior, temos que a ceviana agora coincide com a posição da mediana relativa ao lado  $c$ . Isso, faz com que  $n$  e  $m$  tenham o mesmo comprimento. Ainda se cumpre o teorema de Stewart e neste caso particular poderíamos modificar a expressão algébrica do referido teorema para  $a^2m + b^2n - d^2c = m^2c$  ou  $a^2m + b^2n - d^2c = n^2c$ . Seguindo este raciocínio, o que aconteceria se a ceviana tivesse o mesmo comprimento que  $n$  e  $m$ ? (Figura 8)

**Figura 8** – Segmento CD com comprimento igual  $n$  ou  $m$



Fonte: Elaboração própria dos autores

Neste caso, foi surpreso que os produtos de  $d^2c \neq m^2c$  ou  $d^2c \neq n^2c$ , são distintos apesar de termos arrastados com a ferramenta *mover* o vértice  $C$ , a tais coordenadas que o segmento  $CD$ , tivesse o comprimento de  $n$  ou  $m$ . Pinho e Moretti

(2020) alertam sobre situações semelhantes na figura 7, quando no seu trabalho fazem uma discussão sobre erros de arredondamento, o que explicaria o fato de os produtos serem desiguais. Essas limitações não tornam o GeoGebra um software inútil, pelo contrário, Pinho e Moretti (2020, p. 42) destacam que conhecer tanto às potencialidades, como as limitações de uma ferramenta “é uma condição necessária para que se possa trabalhar com proveito com essa ferramenta, resultantes das limitações de precisão do *software*”.

As questões planteadas foram fechadas, porém, se seguir o raciocínio poderão surgir outras em abertos, por exemplo, o que acontece se os segmentos  $BC$  e  $CA$  tivessem o mesmo comprimento? Ou o se o triângulo  $ACB$  fosse isósceles? Se aplicar esta última questão, a ceviana coincide com outros segmentos de nomes notáveis?

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, teve como objetivo descrever as potencialidades conceituais e didáticas de atividades baseadas em informações históricas a respeito da demonstração do Teorema de Stewart para o ensino da matemática por meio de um objeto de aprendizagem (OA).

Neste sentido foram destacadas algumas maneiras de usar o GeoGebra: como *ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático*, como uma *ferramenta de visualização* e como *ferramenta de descoberta* na demonstração do teorema de Stewart. Com essas maneiras de usar o GeoGebra em função de um objeto de aprendizagem, podemos considerar que este OA tem a possibilidade de catalisar as capacidades cognitivas do raciocínio na hora da exploração, generalização e experimentação na demonstração de teoremas da geometria euclidiana plana, como no nosso caso o Teorema de Stewart.

Nossa maneira de pensar a respeito deste tema, é baseada na experiência que o *software* nos permitiu a visualização tanto de casos particulares, como também possibilitou abordar questões em aberto sobre o comportamento dos comprimentos dos segmentos em função da localização do ponto  $D$  na ceviana relativa ao lado  $c$ . Neste caso por meio desta tecnologia digital conseguimos ampliar já as informações históricas sobre este teorema e gerar assim novas questões que podem ser exploradas na sala de aula da Educação Básica.

## REFERÊNCIAS

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 6. ed. São Paulo: Autêntica, 2019.

CASTILLO, L. A.; GUTIÉRREZ, R. E.; SÁNCHEZ, I. C. O uso do comando sequência na Elaboração de Simuladores com o software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 9, n. 3, p. 106–119, 2020. <https://doi.org/10.23925/2020.v9i3p106-119>

GUTIÉRREZ, R. E.; CASTILLO, L. A. Simuladores com o software GeoGebra como objetos de aprendizagem para o ensino da física. **Tecné Episteme y Didaxis: TED**, [S. l.], n. 47, p. 201–216, 2020. <https://doi.org/10.17227/ted.num47-11336>

KALINKE, M. A.; DEROSI, B., JANEGITZ, L. E.; RIBEIRO, M. S. N. (2015). Tecnologias e educação matemática: um enfoque em lousas digitais e objetos de aprendizagem. Em M. A. KALINKE E L. F. MOCROSKY (Org.), *Educação matemática: pesquisas e possibilidades* (pp. 159-186). Curitiba: Ed. UTFPR.

KOPER, R. (2003). Combining re-usable learning resources to pedagogical purposeful units of learning. Em A. LITTLEJOHN (Org.) *Reusing online resources: a sustainable approach to eLearning* (pp. 1-8). London: Kogan Page.

MENDES, I. A. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

MENDES, I. A. **História da matemática no ensino: Entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas**. 1a. ed. São Paulo: Livraria da Física/SBHMAT, 2015.

MENDES, I. A. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **COCAR**, Bélem, v. Edição Esp, n. 14, p. 01–26, 2022.

PINHO, J. J.; MORETTI, M. T. O uso de Softwares de Geometria Dinâmica no estudo de Geometria Plana: potencialidades e limitações. **Acta Scientiae**, [S. l.], v. 22, n. 5, p. 25–43, 2020. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5870>.

SÁENZ-LUDLOW, A. Iconicity and Diagrammatic Reasoning in Meaning-Making. In: PRESMEG, Norma; RADFORD, Luis; ROTH, Wolff-Michael; KADUNZ, Gert (org.). **Signs of Signification**. Switzerland: Springer Cham, 2018. p. 193–215. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_11).

SÁNCHEZ, I. C.; CASTILLO, L. A.; MENDES, I. A. História da Matemática e Tecnologias Digitais: do que tratam três décadas de teses e dissertações? **PARADIGMA**, [S. l.], v. 42, n. 2, p. 183–205, 2021. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p183-205.id1064>

SANTOS, M. L. (2007). *Objetos e ambientes virtuais de aprendizagem no ensino de matemática: um estudo de caso para o estágio supervisionado de docência* (Dissertação de mestrado). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

SOUSA, G. C. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **REMATEC**, [S. l.], v. 16, n. 37, p. 140–159, 2021. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310>.